07/10/20

Esercitazione 1

Vettori nel piano e nello spazio

Es 1

Dati

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

calcolare $A+B$, $B-\mathcal{C}$, $A+2B-3\mathcal{C}$.

SOL

Si ha

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$B-\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$A+2B-3\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

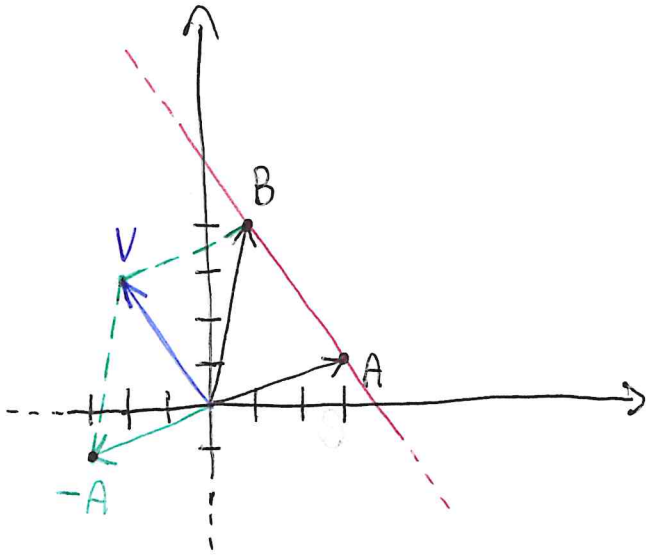
ES 2

Dati $A=(3,1)$, $B=(1,4)$, scrivere un vettore diretto come la retta AB.

SOL

Basta considerare il vettore

$$V = B - A = (-2,3).$$



ES 3

Dire se i vettori $A=(1,2)$ e $B=(2,-1)$ sono proporzionali

OSS

Ricordiamo che due vettori si dicono proporzionali se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $A = \lambda B$. Inoltre, geometricamente, due vettori sono proporzionali se e solo se i punti da essi individuati giacciono sulla stessa retta passante per (0,

SOL

Bisogna verificare se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$(1,2) = \lambda \cdot (2,-1).$$

Ciò si traduce nel seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda \\ 2 = -\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = -4 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE!

Dunque tale λ non esiste, per cui A e B non sono proporzionali. ▨

ES 4

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ i due vettori

$$V_a = (a, 1), \qquad W_a = (4, 9a)$$

sono proporzionali?

SOL

Come nell'esercizio precedente, si tratta di determinare (se esiste) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $V_a = \lambda W_a$. Bisogna cioè risolvere il sistema

$$\begin{cases} a = 4\lambda \\ 1 = 9a\lambda \end{cases}.$$

Risulta

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{4} \\ \frac{9}{4}\alpha^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{6} \\ \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \frac{1}{6} \\ \alpha = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Dunque i vettori V_α e W_α sono proporzionali per $\alpha = \pm\frac{2}{3}$

▨

DEF (Combinazione lineare di n vettori)
Consideriamo i vettori $V_1, \dots, V_n \in \mathbb{R}^n$. Una combinazione lineare di $V_1, \dots, V_n$ è un vettore V della forma

$$V = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_n V_n,$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Per esempio, una combinazione lineare dei vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

è

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

DEF (Sottospazio vettoriale generato da n vettori)
Consideriamo i vettori $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Il sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_n$ è il seguente insieme:

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

In altre parole, esso è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_n$.

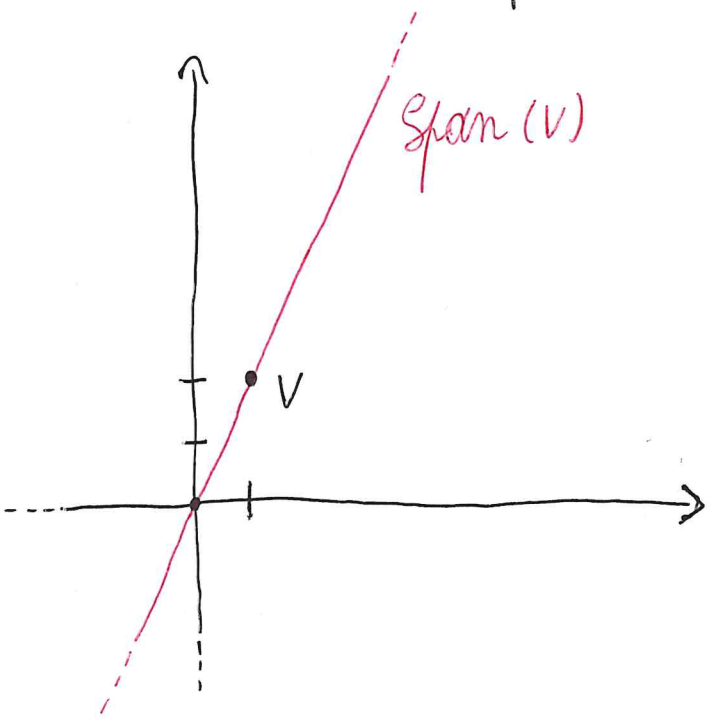
OSS
Nei prossimi incontri dimostreremo che $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, ossia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che soddisfa gli assiomi (1)-(8) nella definizione di spazio vettoriale.

Facciamo qualche esempio per assimilare meglio tale concetto. Cominciamo calcolando lo Span di un singolo vettore. Sia $v = (1, 2)$. Si ha

$$\text{Span}(v) = \{a \cdot (1, 2) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Stiamo dunque considerando tutti i vettori proporzionali a v. Per un'osservazione fatta in precedenza, ciò equivale a considerare tutti i punti che giacciono sulla retta individuata dai punti $(0,0)$ e $(1,2$

D'altra parte, se interpretiamo le coordinate della coppia $(2, 22)$ come ascissa ed ordinata rispettivamente, si ottiene



$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 22 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 2x,$$

che è la forma che già conoscevamo per esprimere la retta Span (v).
Vediamo ora cosa succede quando consideriamo lo Span di due vettori.

Siano, a tal proposito, $V_1 = (1,2)$ e $V_2 = (2,1)$. Risulta

$$\text{Span}(V_1, V_2) = \left\{ \lambda_1 (1,2) + \lambda_2 \cdot (2,1) \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

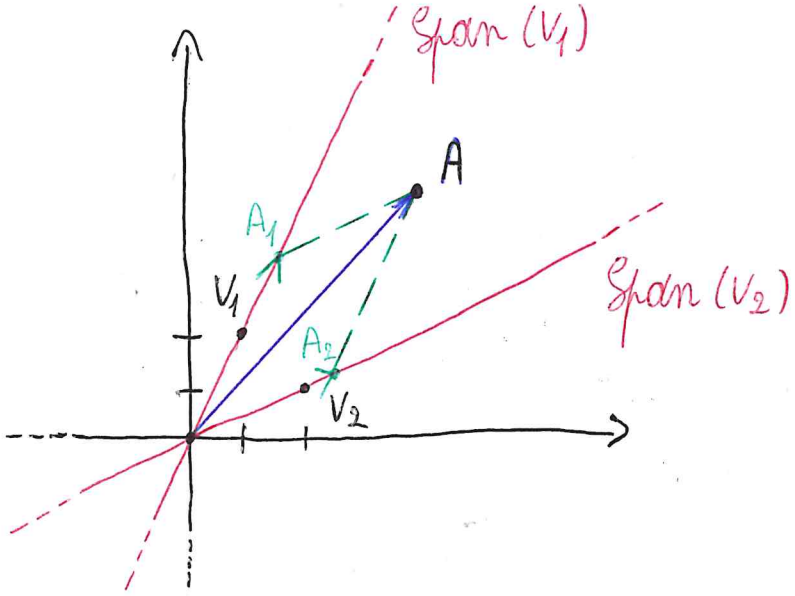
$$= \left\{ (\lambda_1 + 2\lambda_2,\ 2\lambda_1 + \lambda_2) \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che tale insieme contiene i punti delle due rette $\text{Span}(V_1)$ e $\text{Span}(V_2)$. Infatti

$$\lambda_1 \cdot V_1 = \lambda_1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 \in \text{Span}(V_1, V_2),$$

$$\lambda_2 \cdot V_2 = 0 \cdot V_1 + \lambda_2 \cdot V_2 \in \text{Span}(V_1, V_2).$$

Osserviamo inoltre che ogni punto del piano appartiene a $\text{Span}(V_1, V_2)$. Infatti, dato un punto qualsiasi $A \in \mathbb{R}^2$, basta proiettare A su $\text{Span}(V_2)$ nella direzione di $\text{Span}(V_1)$ e A su $\text{Span}(V_1)$ nella direzione di $\text{Span}(V_2)$. In tal modo otteniamo i vettori



$$A_1 = \lambda_1 V_1,$$

$$A_2 = \lambda_2 V_2.$$

Come si vede nella figura, risulta

$$A = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \in \text{Span}(V_1, V_2).$$

Ciò dimostra che $\text{Span}(V_1, V_2) = \mathbb{R}^2$, ossia $\text{Span}(V_1, V_2)$ è l'intero piano.

OSS

Quest'affermazione può essere verificata anche per via algebrica. Basta verificare che, preso un punto generico $A = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il sistema

$$A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot V_1 + \lambda_2 \cdot V_2$$

ammette soluzione. Tuttavia, a breve vedremo alcune tecniche che ci permetteranno di concludere più rapidamente.

ATTENZIONE!!!

Non è detto che lo Span di due vettori sia un piano. A tal proposito consideriamo $V_1 = (1, 2)$, $V_2 = (2, 4)$. Risulta

$$\text{Span}(V_1, V_2) = \left\{ \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (2,4) \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che

$$\text{Span}(v_1, v_2) = \{\lambda_1 \cdot (1,2) + 2\lambda_2 \cdot (1,2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} =$$

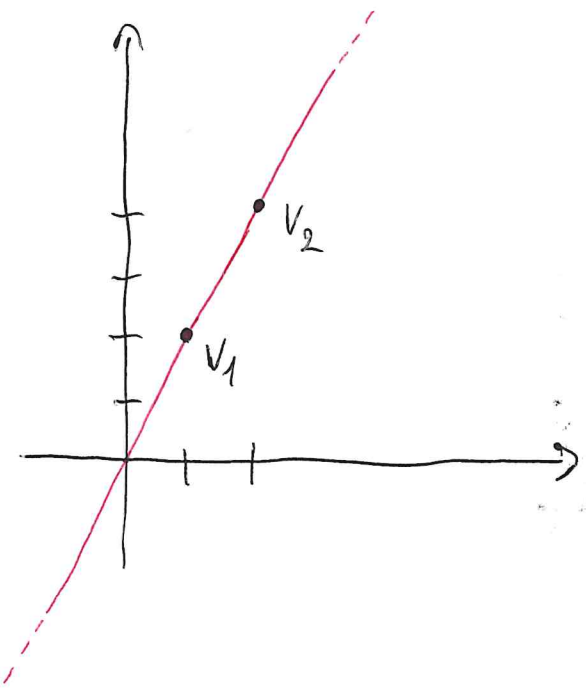
$$= \{(\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot (1,2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\lambda \cdot (1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(v_1),$$

e come abbiamo visto questa è una retta, non tutto il piano!

Tale osservazione ci porterà all'importante concetto di dipendenza e indipendenza lineare di vettori.

Notiamo infatti che nell'ultimo esempio i due vettori v_1 e v_2 sono proporzionali.



Es 5

Siano $A=(2,0,1)$, $B=(0,2,1)$ e sia $\pi = \text{Span}(A,B)$.
Mostrare che $e=(1,3,2)\in\pi$ e $b=(1,-3,2)\notin\pi$.

Sol

Bisogna far vedere che e è combinazione lineare di A e B, ossia risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 \\ 3 = 2\lambda_2 \\ 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \\ \lambda_1+\lambda_2 = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 2 \end{cases} \checkmark$$

Dunque si ha $e = \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$, ovvero $e\in\pi$.
Analogamente, bisogna mostrare che <u>non</u> esistono soluzioni al seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 \\ -3 = 2\lambda_2 \\ 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} \\ \lambda_1+\lambda_2 = \frac{1}{2}-\frac{3}{2} = -1 \neq 2 \end{cases} \times$$

<u>IMPOSSIBILE!</u>

Pertanto $b\notin\pi$.

▨

09/10/20

Esercitazione 2

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori in $\mathbb{R}^n$

DEF

Consideriamo i vettori $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Diremo che essi sono **linearmente indipendenti** se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \underline{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0,$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. In altre parole, ciò significa che l'unica combinazione lineare nulla di tali vettori è quella banale.
Analogamente, diremo che $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente dipendenti se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \underline{0}.$$

ES 1

Mostrare che i vettori

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

SOL

Bisogna porre

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \underline{0}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

e risolvere il sistema corrispondente. Si ottiene

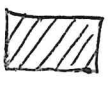
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ -\lambda_3 + 3\lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_3 = 3\lambda_2 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 = -3\lambda_2 \\ \lambda_3 = 3\lambda_2 \\ \lambda_2 - 9\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0. \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque l'unica combinazione lineare nulla di A, B e C è quella banale, ossia

$$0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C = \underline{0}.$$



Es 2

Mostrare che i vettori

$$A=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti.

SOL

Poniamo

$$\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C=\underline{0}, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}.$$

Si ha

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3\\ \lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\lambda_1=-\lambda_3\\ \lambda_2=-\lambda_3\end{cases}$$

Dunque i tre vettori A, B e C sono linearmente dipendenti. Infatti, per trovare una loro combinazione lineare nulla non banale, basta scegliere un valore $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ e porre

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 .$$

Ad esempio, per $\lambda_3 = 1$ si ottiene

$$-1 \cdot A - 1 \cdot B + 1 \cdot C = \underline{0} .$$

▨

Esercizi consigliati

- Mostrare che due vettori $A, B \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali.
- Mostrare che tre vettori $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.

Es 3

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ i vettori

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

sono non complanari?

SOL

Bisogna trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui A, B e C sono linearmente indipendenti. Poniamo quindi

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_1 + \alpha \lambda_2 = 0 \\ \alpha \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \alpha \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \lambda_2 \\ -\alpha^2 \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \alpha \lambda_3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha^2 \lambda_3 \\ -\alpha^3 \lambda_3 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \alpha \lambda_3 \end{cases}.$$

Ne segue che

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha^2 \lambda_3 \\ \lambda_3 (1-\alpha^3) = 0 \\ \lambda_2 = \alpha \lambda_3 \end{cases}.$$

Se $\alpha \neq 1$ si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha^2 \lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \alpha \lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases};$$

se $\alpha = 1$ si ha

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}.$$

Dunque A, B e C sono $\overset{\text{non}}{\text{r}}$complanari se e solo se $\alpha \neq 1$.

▨

12/10/20

Esercitazione 3

Prodotto scalare, prodotto vettoriale e prodotto misto

DEF

Consideriamo i due vettori $V=(x_1,\dots,x_n), W=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
Definiamo il prodotto scalare di V e W come

$$\langle V,W\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1+\dots+x_ny_n \in \mathbb{R}.$$

OSS

Ricordiamo che il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $\langle V,W\rangle = \langle W,V\rangle$

(2) $\langle V,W+Z\rangle = \langle V,W\rangle + \langle V,Z\rangle$

(3) $\langle V,\lambda W\rangle = \lambda\langle V,W\rangle$

(4) $\langle V,V\rangle \geq 0$ e si ha $\langle V,V\rangle = 0$ se e solo se $V=\underline{0}$.

DEF

Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Definiamo la <u>norma di v</u> come

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Se $v = (x_1, \dots, x_n)$ si ha

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Es 1

Mostrare che due vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$ sono perpendicolari se e solo se $\langle v, w \rangle = 0$.

SOL

Siano $v = (x_1, x_2)$, $w = (y_1, y_2)$. Osserviamo che

$$v \perp w \iff \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2,$$

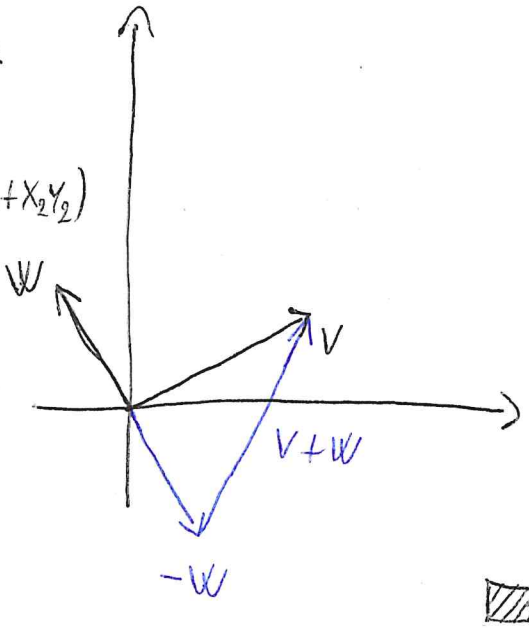
ossia $v \perp w$ sse vale il teorema di Pitagora. Esplicitando le norme si ottiene

$$v \perp w \iff x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$$

$$\iff \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{y_2^2} = \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2} + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

$$\iff x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

$$\iff \langle v, w \rangle = 0.$$



∎

Possiamo allora generalizzare ciò che accade in $\mathbb{R}^2$ con la seguente:

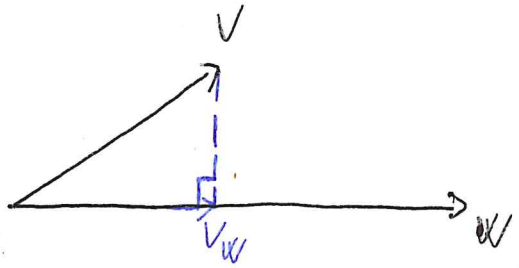
DEF

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$. Diremo che v e w sono ortogonali se

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, vogliamo ora determinare la proiezione ortogonale v_w di v su w.

Osserviamo che essa è caratterizzata dalle due proprietà seguenti:



$$v_w \in \mathrm{Span}(w)$$

$$v - v_w \perp w.$$

Allora esiste $\lambda_v \in \mathbb{R}$ tale che $v_w = \lambda_v w$ e inoltre

$$\langle v - v_w, w \rangle = 0.$$

Sviluppando questa relazione si ottiene

$$\langle v - \lambda_v w, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle \lambda_v w, w \rangle =$$

$$= \langle v, w \rangle - \lambda_v \langle w, w \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_v = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}.$$

Dunque la proiezione ortogonale di V su W è

$$V_W = \frac{\langle V, W \rangle}{\|W\|^2} W.$$

Es 2

Dato $A=(3,1,5)$, $B=(2,2,4)$, scrivere i due versori che sono diretti come la retta AB.

SOL

La retta AB ha la direzione del vettore

$$V := B - A = (2,2,4) - (3,1,5) = (-1,1,-1).$$

Si ha

$$\|V\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Pertanto i due versori richiesti sono

$$u_1 = \frac{V}{\|V\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1),$$

$$u_2 = -u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1).$$

Es 3

Usando le proprietà del prodotto scalare dimostrare il teorema di Carnot o del coseno:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2.$$

SOL

Risulta

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle =$$

$$= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle =$$

$$= \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle + \|v\|^2 =$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

ES 4

Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy - Schwarz:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Dedurne, usando il teorema di Pitagora, la disuguaglianza triangolare:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Quando vale l'uguaglianza in queste due disuguaglianze?

SOL

Se $v=0$, la disuguaglianza di Cauchy - Schwarz è banalmente verificata. Se $v \neq 0$ si ha $u = u_1 + u_2$, dove

$$u_1 = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v, \qquad u_2 = u - u_1.$$

Ne segue che

$$|\langle u, v\rangle| = \|u_1\| \cdot \|v\|.$$

Per il teorema di Pitagora si ha

$$|\langle u, v\rangle|^2 = \|u_1\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) \cdot \|v\|^2 =$$

$$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2.$$

Prendendo le radici quadrate si ha la tesi:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Osserviamo che l'uguaglianza si ha per $\|u_2\| = 0$, ossia $u \parallel v$.
Ne segue che

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq$$

$$\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \leq$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 =$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Ancora una volta, prendendo le radici quadrate si ha la tesi.
In questo caso la disuguaglianza diventa un'uguaglianza se

$$\|u\| \cdot \|v\| = |\langle u, v\rangle|,$$

$$|\langle u, v\rangle| = \langle u, v\rangle,$$

ossia se $u \parallel v$ e inoltre u ha lo stesso verso di v.

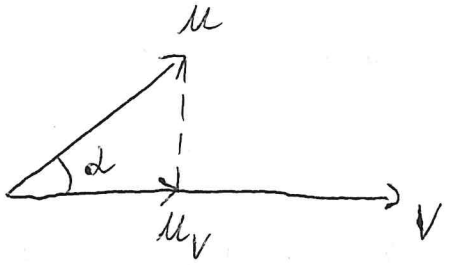
OSS

Osserviamo che il teorema di Pitagora è una conseguenza del teorema di Carnot, infatti se $u \perp v$ si ha

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\cancel{\langle u, v\rangle} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Consideriamo ora due vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ e notiamo che

$$\cos\alpha = \frac{\|u_v\|}{\|u\|},$$



dove $\alpha < \frac{\pi}{2}$ è l'angolo acuto formato da u e v. Usando l'espressione di u_v si ottiene

$$\cos\alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|^2} \cancel{\|v\|} \cdot \frac{1}{\|u\|} =$$

$$= \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Verificare per esercizio che la formula

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

vale anche se α <u>non</u> è un angolo acuto.

Da ciò si ricava un'altra espressione per il prodotto scalare, ossia

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos\alpha,$$

dove α è l'angolo compreso tra u e v.

Adesso focalizziamo la nostra attenzione sullo spazio $\mathbb{R}^3$. In tal caso è possibile definire un altro tipo di prodotto.

DEF

Consideriamo i due vettori $V=(x_1,x_2,x_3)$, $W=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$. Definiamo <u>il prodotto vettoriale di V per W</u> come

$$V\wedge W := (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)\in\mathbb{R}^3.$$

Verificare per esercizio che il prodotto vettoriale soddisfa le seguenti proprietà:

- $V\wedge W = -W\wedge V$,
- $(t_1V_1 + t_2V_2)\wedge W = t_1(V_1\wedge W) + t_2(V_2\wedge W)$,
  $V\wedge(t_1W_1 + t_2W_2) = t_1(V\wedge W_1) + t_2(V\wedge W_2)$,
- $V\wedge W = 0 \iff V \parallel W$.

ES 5

Mostrare che

$$\langle v, w\rangle^2 + \|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2.$$

SOL

Siano $v = (x_1, x_2, x_3)$, $w = (y_1, y_2, y_3)$. Allora

$$\begin{aligned}
&\langle v, w\rangle^2 + \|v \wedge w\|^2 = \\
&= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + \\
&\quad + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = \\
&= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + \\
&\quad + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\cdot(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2.
\end{aligned}$$

▨

Dall'esercizio precedente possiamo ricavare una formula per il modulo del prodotto vettoriale, ossia

$$\begin{aligned}
\|v \wedge w\| &= \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2} = \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \|v\|^2\|w\|^2\cos^2\alpha} = \\
&= \|v\|\cdot\|w\|\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \|v\|\cdot\|w\|\sqrt{\sin^2\alpha} = \\
&= \|v\|\cdot\|w\|\cdot|\sin\alpha|,
\end{aligned}$$

dove α è l'angolo compreso tra v e w.

Es 6

Mostrare che $\langle V, V \wedge W \rangle = \langle W, V \wedge W \rangle = 0$.

Sol

Siano $V = (x_1, x_2, x_3)$, $W = (y_1, y_2, y_3)$. Si ha

$$V \wedge W = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Allora

$$\langle V, V \wedge W \rangle = x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - x_1 x_2 y_3 + \\ + x_1 x_3 y_2 - x_2 x_3 y_1 = 0$$

$$\langle W, V \wedge W \rangle = x_2 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_2 + x_3 y_1 y_2 - x_1 y_2 y_3 + \\ + x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3 = 0.$$

Es 7

Siano $V, W \in \mathbb{R}^3$ due vettori non paralleli. Mostrare che $V \wedge W$ è perpendicolare a tutte le combinazioni lineari $xV + yW$.

Sol

Si ha

$$\langle xV + yW, V \wedge W \rangle = x \langle V, V \wedge W \rangle + y \langle W, V \wedge W \rangle = 0$$

Es 8

Determinare un vettore w perpendicolare ai due vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

SOL

Basta calcolare $u \wedge v$. Risulta allora

$$w = u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 - 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Infine è utile introdurre il prodotto misto di tre vettori, ossia $\langle u, v \wedge w \rangle$. Valgono le seguenti proprietà:

- u, v, w sono linearmente indipendenti se e solo se $\langle u, v \wedge w \rangle \neq 0$;
- se $v \wedge w \neq 0$ e $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$, allora $u \in \mathrm{Span}(v, w)$.

Es 9

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ i vettori

$$u = (1, 2, \alpha), \quad v = (2, 4, 7), \quad w = (0, 0, 1)$$

sono linearmente indipendenti?

SOL

Bisogna trovare i valori di a per cui $\langle u, v \wedge w \rangle \neq 0$.

Risulta

$$v \wedge w = (4 \cdot 1 - 7 \cdot 0,\ 7 \cdot 0 - 2 \cdot 1,\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0) =$$

$$= (4, -2, 0)$$

$$\langle u, v \wedge w \rangle = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + a \cdot 0 = 0.$$

Ciò significa che i tre vettori dati sono linearmente dipendenti per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$. ▨

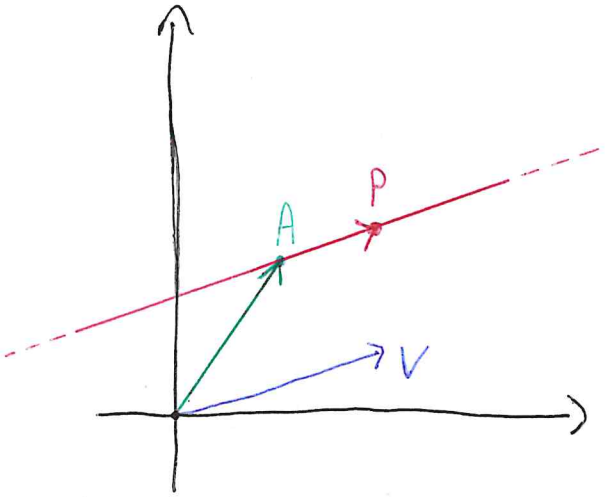
Rette e piani nello spazio

Per iniziare definiamo la forma parametrica di una retta in $\mathbb{R}^2$. Consideriamo un punto $A = (x_0, y_0)$ e un vettore $v = (v_1, v_2)$. La retta passante per A con direzione parallela a quella di v è definita dalla seguente condizione:

$$P - A = t v,$$

ossia

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases}.$$



Dalla forma parametrica della retta possiamo ricavare quella cartesiana. Basta ricavare t:

$$t = \frac{X - X_0}{V_1}$$

$$\Rightarrow Y = Y_0 + \frac{X - X_0}{V_1} V_2$$

$$\Rightarrow V_2 X - V_1 Y + Y_0 V_1 - X_0 V_2 = 0.$$

Osserviamo che il vettore dei coefficienti $n = (V_2, -V_1)$ è tale che $n \perp V$.

Generalizzando ad $\mathbb{R}^3$ si ha la seguente

DEF

La forma parametrica della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $A = (X_A, Y_A, Z_A)$ e parallela alla direzione di $V = (a, b, c)$ è data da

$$\begin{cases} X = X_A + at \\ Y = Y_A + bt \\ Z = Z_A + ct \end{cases}.$$

La forma cartesiana si ottiene eliminando t.

Diamo ora le definizioni analoghe per descrivere i piani in $\mathbb{R}^3$.

DEF

Consideriamo un punto $A = (X_A, Y_A, Z_A)$ e due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (V_1, V_2, V_3)$. La forma parametrica del piano generato da u, V e passante per A è data da

$$P - A = \lambda_1 u + \lambda_2 V,$$

ossia

$$\begin{cases} x = x_A + t_1 u_1 + t_2 v_1 \\ y = y_A + t_1 u_2 + t_2 v_2 \\ z = z_A + t_1 u_3 + t_2 v_3 \end{cases}.$$

Per ottenere la forma cartesiana basta eliminare t_1 e t_2.

OSS

Consideriamo il piano $ax+by+cz+d=0$. Se $A=(x_A, y_A, z_A)$ è un punto del piano si ha

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0.$$

Sottraendo le due equazioni precedenti si ha

$$a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0.$$

Pertanto P è un punto di tale piano se e solo se

$$\langle (a,b,c), P-A \rangle = 0.$$

In altre parole, il vettore dei coefficienti (a,b,c) è il vettore normale al piano $ax+by+cz+d=0$.

Es 1

Determinare in $\mathbb{R}^2$ un'equazione cartesiana e una parametrica della retta che passa per $P=(2,2)$ e con direzione normale a quella del vettore $n=(-\frac{1}{2}, 1)$.

SOL

Un punto $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ appartiene ad r se e solo se

$$r \perp X-P \iff \langle (x,y)-(2,2), \left(-\tfrac{1}{2},1\right)\rangle = 0$$

$$\iff$$

$$\langle (x-2,y-2), \left(-\tfrac{1}{2},1\right)\rangle = 0$$

$$\iff$$

$$-\frac{1}{2}x+1+y-2=0 \iff x-2y+2=0.$$

Per ottenere una forma parametrica basta porre $t=y$:

$$\begin{cases} x=2t-2 \\ y=t \end{cases}.$$

Es 2

Scrivere un'equazione parametrica e una cartesiana della retta in $\mathbb{R}^3$ passante per $P=(2,3,1)$ e $Q=(4,5,2)$.

SOL

Il vettore direzione è dato da

$$V=Q-P=(2,2,1).$$

Dunque una forma parametrica della retta è data da

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=3+2t \\ z=1+t \end{cases}.$$

Una forma cartesiana è

$$\begin{cases} x = 1+2z-1 \\ y = 3+2z-2 \\ t = z-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z \\ y = 1+2z \end{cases}.$$

Es 3

Determinare un'equazione cartesiana e una parametrica del piano passante per $P=(1,1,3)$ con direzione normale $n=(-5,-2,+1)$.

Sol

Un punto $X=(x,y,z)$ appartiene a tale piano se e solo se

$$\langle X-P, n\rangle = 0 \iff \langle (x-1, y-1, z-3), (-5,-2,1)\rangle = 0$$

$$\iff -5x+5-2y+2+z-3=0$$

$$\iff 5x+2y-z-4=0.$$

Per ottenere una forma parametrica poniamo $z=v, y=u$. Allora

$$\begin{cases} 5x+2u-v-4=0 \\ y=u \\ z=v \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v + \frac{4}{5} \\ y=u \\ z=v \end{cases}.$$

14/10/20

Esercitazione 4

Numeri complessi

Ricordiamo che un numero complesso può essere interpretato come un punto (a,b) del piano complesso $\mathbb{C}$. L'insieme di tali punti è dotato delle seguenti operazioni:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Inoltre un numero complesso può anche essere interpretato come una quantità del tipo

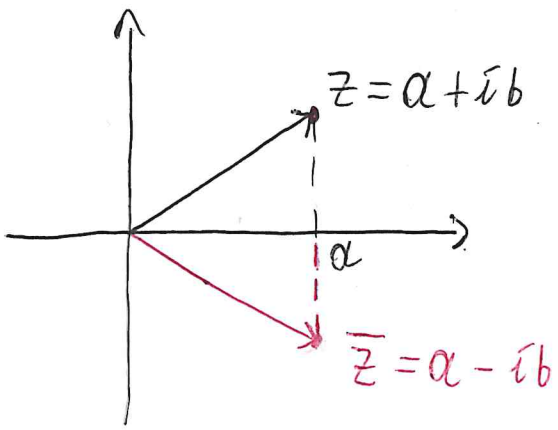
$$a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

dove $i = \sqrt{-1}$. In ogni caso diremo che a è la parte reale di tale numero complesso, mentre b è la sua parte immaginaria

DEF

Dato un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definiamo il complesso coniugato di z come

$$\overline{z} = a - ib.$$



OSS

Notiamo che

$$z = \overline{z} \iff a + ib = a - ib$$

$$\iff 2ib = 0$$

$$\iff b = 0.$$

In altre parole, un numero complesso coincide con il suo coniugato se e solo se è un numero reale.

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$,
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

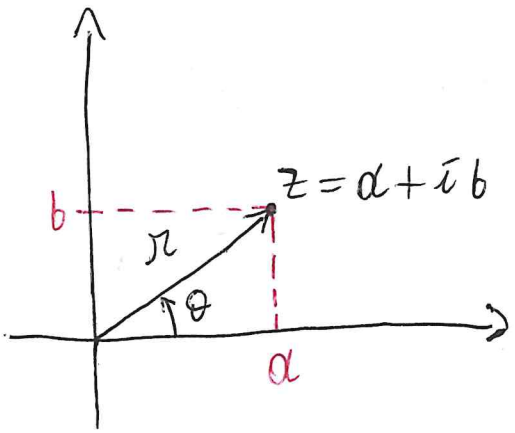
Un altro modo utile di rappresentare i numeri complessi è la <u>forma polare</u>. Dato un numero complesso $z = a + ib$, poniamo

$$r = |z|,$$

$$\theta = \text{Arg } z \quad (\text{angolo formato da } z \text{ con l'asse reale}).$$

Siccome $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, possiamo scrivere

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$



In questa forma il prodotto è facile da calcolare. Infatti se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, allora

$$z \cdot w = rs(\cos\theta\cos\varphi + i\sin\theta\cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\sin\varphi) =$$
$$= rs[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)] =$$
$$= rs[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)].$$

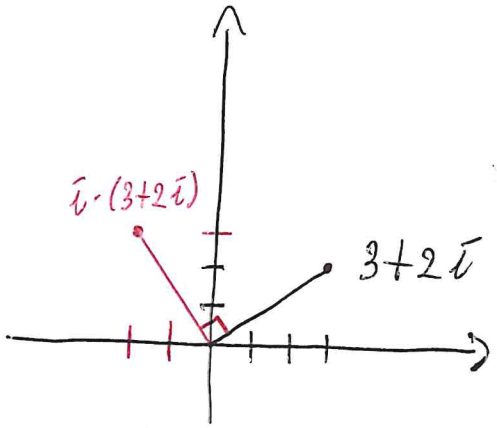
Dunque moltiplicare per w corrisponde ad allungare o accorciare z di un fattore s e a ruotarlo di un angolo φ.
Osserviamo che

$$i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Dunque se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ha

$$iz = r\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

In altre parole, moltiplicare per i corrisponde a ruotare z di $90°$ in senso antiorario.



OSS

Si ha inoltre

$$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)),$$
$$\vdots$$
$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

nota come formula di De Moivre.

Es 1

Calcolare le radici n-esime dell'unità, ossia le soluzioni dell'equazione $z^n = 1$.

Sol

Posto $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, si ottiene

$$z^n = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0).$$

Dunque bisogna porre

$$r^n = 1 \qquad \Rightarrow r = 1$$

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \cos 0 \\ \sin(n\theta) = \sin 0 \end{cases} \Rightarrow n\theta = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Allora le radici n-esime dell'unità sono i numeri complessi

$$z_k := \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Siccome $z_{n+k} = z_{0+k}$ le radici distinte sono

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

e formano, nel piano complesso, i vertici di un poligono regolare.

Es 2

Calcolare le radici ottiche dell'unità.

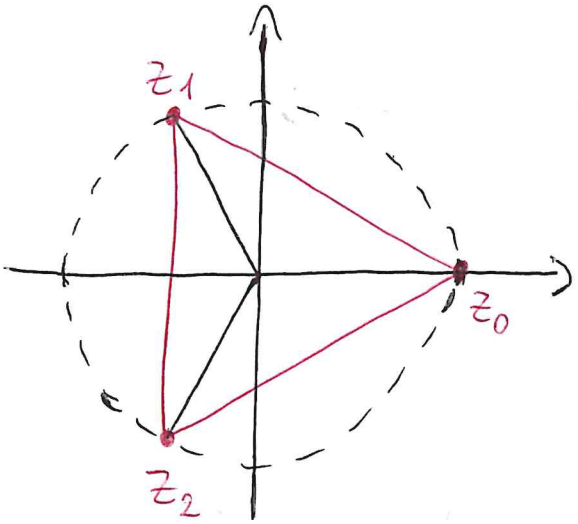
sol

Per l'esercizio precedente, le radici ottiche dell'unità sono

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\,\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Se rappresentiamo tali punti nel piano complesso si ottiene



Dunque z_0, z_1, z_2 sono i vertici di un triangolo equilatero.

Es 3

Trovare le soluzioni di $z^4 = 1$.

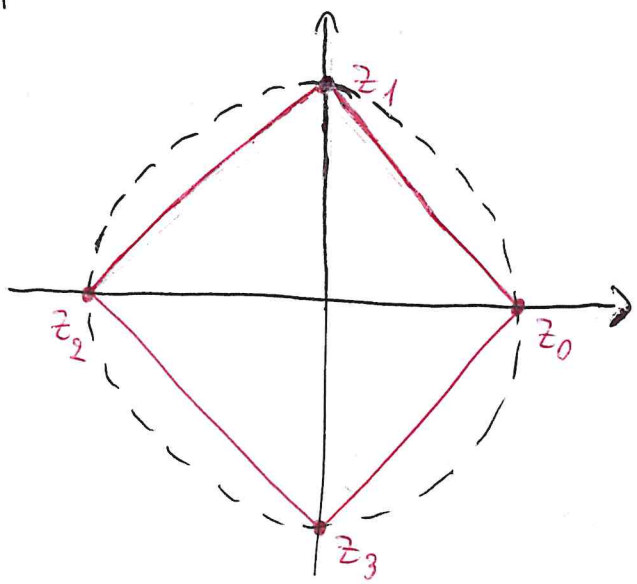
SOL

Si ha

$$z_0 = 1, \qquad z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad z_3 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i.$$

Tali radici formano i vertici di un quadrato nel piano complesso:



Enunciamo il seguente importante teorema:

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni polinomio a coefficienti complessi non costante, ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$.

19/10/20

Esercitazione 5

Sottospazi vettoriali. Basi.

Es 1

Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ delle funzioni reali di una variabile reale. Quali dei seguenti sono sottospazi vettoriali di V?

(a) $H_1 = \{f \in V : f(3) = 0\}$,

(b) $H_2 = \{g \in V : g(2) = g(4)\}$,

(c) $H_3 = \{h \in V : h(7) = 1 + h(0)\}$.

oss

Ricordiamo che V è dotato della struttura di spazio vettoriale con le seguenti operazioni

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(f, g) \longmapsto f + g \qquad (\lambda, f) \longmapsto \lambda \cdot f,$$

dove

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \lambda \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda\, f(x).$$

SOL

Per dimostrare che un sottoinsieme H di V è un sottospazio vettoriale, bisogna verificare le seguenti condizioni:

- $0_V \in H$,
- $f, g \in H \Rightarrow f+g \in H$,
- $\lambda \in \mathbb{R}, f \in H \Rightarrow \lambda \cdot f \in H$.

(a) Siccome $0_V(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, in particolare si ha

$$0_V(3) = 0.$$

Ciò significa che $0_V \in H_1$.

Siano ora $f, g \in H_1$. Allora

$$f(3) = 0, \quad g(3) = 0.$$

Si ha

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0,$$

ossia $f+g \in H_1$.

Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in H_1$ si ha

$$(\lambda \cdot f)(3) = \lambda \, f(3) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot f \in H_1.$$

Pertanto H_1 è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Osserviamo che

$$0_V(2) = 0 = 0_V(4),$$

quindi $0_V \in H_2$.
Consideriamo $g_1, g_2 \in H_2$. Allora

$$g_1(2) = g_1(4),$$
$$g_2(2) = g_2(4).$$

Risulta

$$(g_1+g_2)(2) = g_1(2) + g_2(2) =$$

$$= g_1(4) + g_2(4) = (g_1+g_2)(4),$$

ossia $g_1+g_2 \in H_2$. Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, $g \in H_2$ si ha

$$(\lambda \cdot g)(2) = \lambda\, g(2) = \lambda\, g(4) = (\lambda \cdot g)(4)$$
$$\Rightarrow \lambda \cdot g \in H_2.$$

Pertanto H_2 è un sottospazio vettoriale di V.
(c) Osserviamo che

$$0_V(7) = 0, \quad 1 + 0_V(0) = 1 + 0 = 1$$
$$\Rightarrow 0_V \notin H_3.$$

Dunque H_3 <u>non</u> è un sottospazio vettoriale di V.

▨

Es 2

Scrivere il polinomio $P(x) = -x^2 + 7$ come combinazione lineare di

$$P_1(x) = x^2 - 2x + 5, \quad P_2(x) = 2x^2, \quad P_3(x) = x + 1.$$

Sol

Vogliamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$P(x) = \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x),$$

ossia

$$-x^2 + 7 = \lambda_1 (x^2 - 2x + 5) + \lambda_2 (2x^2) + \lambda_3 (x + 1) =$$

$$= (\lambda_1 + 2\lambda_2) x^2 + (-2\lambda_1 + \lambda_3) x + 5\lambda_1 + \lambda_3.$$

Ciò si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_3 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_3 = 2\lambda_1 \\ 5(-1 - 2\lambda_2) + 2\lambda_1 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_3 = 2(-1 - 2\lambda_2) = -2 - 4\lambda_2 \\ -5 - 10\lambda_2 + 2(-1 - 2\lambda_2) = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_3 = -2 - 4\lambda_2 \\ -5 - 10\lambda_2 - 2 - 4\lambda_2 = 7 \end{cases}.$$

Quindi si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_3 = -2 - 4\lambda_2 \\ -14\lambda_2 = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = 1 \cdot P_1(x) - 1 \cdot P_2(x) + 2 \cdot P_3(x).$$

Es 3

Verificare che $\mathcal{B} = \{(x+1)^2, x+1, 1\}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale a due.

SOL

Mostriamo che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente. Posto

$$\lambda_1 (x+1)^2 + \lambda_2 (x+1) + \lambda_3 \cdot 1 = 0,$$

si ha

$$\lambda_1 (x^2 + 2x + 1) + \lambda_2 x + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2) x + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Ne segue che

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

ossia $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente. Mostriamo infine che

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \mathrm{Span}\left((x+1)^2, x+1, 1\right).$$

Posto $P(x) = ax^2 + bx + c$, vogliamo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$P(x) = \lambda_1 (x+1)^2 + \lambda_2 (x+1) + \lambda_3,$$

ossia

$$ax^2 + bx + c = \lambda_1 x^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = b - 2a \\ \lambda_3 = c - a - (b - 2a) = a - b + c \end{cases}.$$

Dunque

$$P(x) = a(x+1)^2 + (b-2a)(x+1) + a - b + c.$$

Pertanto $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

21/10/20

Esercitazione 6

Basi e dimensione di uno spazio vettoriale. Somma diretta e formula di Grassmann.

Es 1

Mostrare che $\mathbb{C}$ ha dimensione 2 come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, mentre ha dimensione 1 come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

SOL

Osserviamo che

$$z \in \mathbb{C} \iff z = a \cdot 1 + b \cdot i, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Poiché $1, i$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, si ha

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Inoltre, per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$z = z \cdot 1.$$

Pertanto risulta

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

Es 2

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e sia $H = \{p \in V : p(1) = 0\}$. Trovare una base di H e concludere che $\dim H = 2$. Scrivere le componenti di $p(x) = x^2 + 2x - 3 \in H$ rispetto alla base trovata.

Sol

Un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in V$ appartiene ad H se e solo se

$$p(1) = a + b + c = 0,$$

ossia

$$c = -a - b.$$

Quindi $p(x)$ è della forma

$$p(x) = ax^2 + bx - a - b =$$

$$= a(x^2 - 1) + b(x - 1).$$

Ciò equivale a dire che $p(x) \in \mathrm{Span}(x^2 - 1, x - 1)$ e quindi

$$H = \mathrm{Span}(x^2 - 1, x - 1).$$

Mostriamo ora che $x^2 - 1, x - 1$ sono linearmente indipendenti.

Posto

$$\lambda_1(x^2-1)+\lambda_2(x-1)=0,$$

si ha

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 x-\lambda_1-\lambda_2=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ -\lambda_1-\lambda_2=0\ \checkmark\end{cases}.$$

Dunque $\{x^2-1, x-1\}$ è una base di H e $\dim H=2$.

Sia ora

$$x^2+2x-3=\lambda_1(x^2-1)+\lambda_2(x-1).$$

Ne segue che

$$x^2+2x-3=\lambda_1 x^2+\lambda_2 x-\lambda_1-\lambda_2$$

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=2\\ -\lambda_1-\lambda_2=-3\ \checkmark\end{cases},$$

ossia

$$x^2+2x-3=1\cdot(x^2-1)+2\cdot(x-1).$$

▨

Es 3

Siano U e V i piani di $\mathbb{R}^3$ di equazione $X+2Y+3Z=0$ e $3X+2Y+Z=0$ rispettivamente. Determinare una base di $U+V$ e $U \cap V$.

SOL

I punti del piano U soddisfano l'equazione

$$X+2Y+3Z=0$$

$$\Rightarrow X=-2Y-3Z.$$

Ciò significa che U è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^3$ del tipo

$$(-2Y-3Z, Y, Z) = (-2Y, Y, 0) + (-3Z, 0, Z) =$$

$$= Y(-2,1,0) + Z(-3,0,1).$$

Dunque

$$U = \text{Span}((-2,1,0), (-3,0,1)).$$

Siccome $(-2,1,0)$ e $(-3,0,1)$ non sono proporzionali, essi sono linearmente indipendenti. Allora $B_U = \{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$ è una base di U e si ha

$$\dim U = 2.$$

Allo stesso modo, per V si ha

$$z = -3x - 2y$$

$$\Rightarrow (x, y, -3x-2y) = (x, 0, -3x) + (0, y, -2y) =$$

$$= x(1, 0, -3) + y(0, 1, -2)$$

$$\Rightarrow V = \text{Span}((1,0,-3), (0,1,-2)).$$

Poiché $(1,0,-3)$ e $(0,1,-2)$ sono linearmente indipendenti, l'insieme $B_V = \{(1,0,-3), (0,1,-2)\}$ è una base di V. Quindi

$$\dim V = 2.$$

Osserviamo che un punto (x,y,z) appartiene a $U \cap V$ se soddisfa

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y - 3z \\ 3(-2y - 3z) + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z \\ -6y - 9z + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y - 3z \\ 8z = -4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4z - 3z = z \\ y = -2z \end{cases}$$

Dunque

$$(x, y, z) = (z, -2z, z) = z \cdot (1, -2, 1)$$

$$\Rightarrow U \cap V = \text{Span}((1, -2, 1)).$$

Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) =$$

$$= 2 + 2 - 1 = 3.$$

Ciò significa che $U + V = \mathbb{R}^3$, per cui una sua base è

$$\mathcal{B}_{U+V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es 4

In $\mathbb{R}^4$ si considerino

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$V = \text{Span}(v_1, v_2), \qquad W = \text{Span}(w_1, w_2).$$

(a) Trovare una base di $V + W$,

(b) Trovare $\dim(V \cap W)$,

(c) Trovare una base di $V \cap W$.

SOL

(a) Ricordiamo che

$$V+W = \mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2).$$

Controlliamo se i quattro vettori sono linearmente indipendenti.

Sia

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2 = 0.$$

Allora

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 9\lambda_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 \\ -5\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -6\lambda_2 - 6\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -8\lambda_2 - 8\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_4 = 5\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ -6\lambda_2 - 6\lambda_3 + 3(5\lambda_2 + 2\lambda_3) = 0 \\ -8\lambda_2 - 8\lambda_3 + 5(5\lambda_2 + 2\lambda_3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_4 = 5\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 9\lambda_2 = 0 \\ 17\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Pertanto $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ è una base di $V+W$ e $\dim(V+W)=4$, ossia $V+W=\mathbb{R}^4$.

(b) Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim(V\cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) =$$

$$= 2+2-4=0.$$

(c) Risulta allora $V\cap W=\{0\}$, ossia esso non ha basi. ▨

DEF

Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W due sottospazi vettoriali di V. Diremo che V è somma diretta di U e W se

- $V = U+W$,
- $U\cap W=\{0\}$.

In tal caso scriveremo $V = U\oplus W$.

OSS

Nell'esercizio 4 abbiamo dimostrato che

$$\mathbb{R}^4 = V\oplus W.$$

26/10/20

Esercitazione 7

Somma diretta di spazi vettoriali

Es 1

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e siano $W = \text{Span}((2,1))$, $U = \text{Span}((0,1))$. Dimostrare che

$$V = U \oplus W.$$

Dato $U' = \text{Span}((1,1))$, dimostrare che $V = W \oplus U'$.

SOL

Osserviamo che $(2,1)$ e $(0,1)$ non sono proporzionali e quindi essi sono linearmente indipendenti. Siccome $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, allora l'insieme

$$\mathcal{B} = \{(2,1), (0,1)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^2$. In particolare, si ha $\mathbb{R}^2 = \text{Span}((2,1),(0,1))$. Ciò significa che, dato $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$(x,y) = \lambda_1 \cdot (2,1) + \lambda_2 \cdot (0,1) =: u + w,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $u := \lambda_2 \cdot (0,1) \in U$, $w := \lambda_1 \cdot (2,1) \in W$. Dunque

$$V = U + W.$$

Consideriamo $(x,y) \in U \cap W$. Allora

$$(x,y) = \lambda_1 \cdot (2,1) = (2\lambda_1, \lambda_1),$$

$$(x,y) = \lambda_2 \cdot (0,1) = (0, \lambda_2).$$

Ne segue che

$$(2\lambda_1, \lambda_1) = (0, \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Ciò significa che $(x,y) = (0,0)$, ossia $U \cap W = \{0\}$. Pertanto si ha $V = U \oplus W$.

Analogamente, i vettori $(2,1)$ e $(1,1)$ sono linearmente indipendenti. Come visto prima, da ciò segue che $V = W + U'$.

Dalla formula di Grassmann segue che

$$\dim(W \cap U') = \dim W + \dim U' - \dim(W + U') =$$

$$= 1 + 1 - 2 = 0.$$

Dunque si ha $W \cap U' = \{0\}$ e di conseguenza $V = W \oplus U'$.

OSS

L'esercizio 1 ci dice che la decomposizione di uno spazio vettoriale in somma diretta di suoi sottospazi vettoriali non è unica. In particolare abbiamo visto che, pur fissando lo spazio W, esistono almeno due sottospazi U, U' di $\mathbb{R}^2$ tali che

$$\mathbb{R}^2 = W \oplus U = W \oplus U'.$$

ES 2

Consideriamo lo spazio vettoriale $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ delle funzioni reali di una variabile reale. Definiamo

$$V^+ := \{ f \in V : f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \},$$

$$V^- := \{ f \in V : f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \},$$

ossia gli insiemi delle funzioni pari e dispari, rispettivamente. Mostrare che V^+ e V^- sono sottospazi vettoriali di V e che

$$V = V^+ \oplus V^-.$$

Mostrare inoltre che ogni $f \in V$ può essere scritto in modo unico nella forma

$$f = f^+ + f^-,$$

dove $f^+ \in V^+$, $f^- \in V^-$.

SOL

Osserviamo che $0 \in V^+, V^-$. Infatti si ha

$$0(x) = 0 = 0(-x) = -0(-x).$$

Inoltre se $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, f_1, f_2 \in V^+$ si ha

$$(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) =$$

$$= f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$$

$$\Rightarrow f_1 + f_2 \in V^+,$$

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda \cdot f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda \cdot f)(x)$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot f \in V^+.$$

Ciò significa che V^+ è un sottospazio vettoriale di V.

Allo stesso modo, se $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, f_1, f_2 \in V^-$, risulta

$$(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) =$$

$$= -f_1(x) - f_2(x) = -(f_1(x) + f_2(x)) =$$

$$= -(f_1 + f_2)(x) \Rightarrow f_1 + f_2 \in V^-,$$

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda f(-x) = -\lambda f(x) = -(\lambda \cdot f)(x)$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot f \in V^-.$$

Dunque anche V^- è un sottospazio vettoriale di V.

Sia ora $f \in V$. Allora si ha

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} =$$

$$=: g_1(x) + g_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

dove $g_1(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $g_2(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Risulta

$$g_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g_1(x)$$

$$\Rightarrow g_1 \in V^+,$$

$$g_2(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -g_2(x)$$

$$\Rightarrow g_2 \in V^-.$$

Ciò significa che $V = V^+ + V^-$. Consideriamo $f \in V^+ \cap V^-$. Allora

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f = 0.$$

Dunque $V^+ \cap V^- = \{0\}$. In altre parole, si ha

$$V = V^+ \oplus V^-.$$

Infine, supponiamo che data $f \in V$ si abbia

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

dove $f_1, g_1 \in V^+$, $f_2, g_2 \in V^-$. Allora

$$f_1(x) - g_1(x) = g_2(x) - f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $f_1 - g_1 \in V^+$, $g_2 - f_2 \in V^-$ si ha

$$f_1 - g_1,\ g_2 - f_2 \in V^+ \cap V^- = \{0\},$$

ossia $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$. Ciò significa che la decomposizione

$$f = f^+ + f^-, \qquad f \in V,\ f^+ \in V^+,\ f^- \in V^-$$

è univocamente determinata.

∎

OSS

L'ultima proprietà dimostrata nell'esercizio 2 in realtà è una caratterizzazione della somma diretta. In altre parole, uno spazio vettoriale V è somma diretta dei sottospazi U e W se ogni elemento $v \in V$ si può scrivere in maniera unica nella forma

$$V = u + w,$$

dove $u \in U$, $w \in W$.

28/10/20

Esercitazione 8

Applicazioni lineari

Es 1

Consideriamo

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x_2 - x_3,$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3)$. Dire se f è un'applicazione lineare e, in caso di risposta affermativa, trovare una base di $\ker f$.

SOL

Dati $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ si ha

$$f(x+y) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix} = (x_2+y_2) - (x_3+y_3) =$$

$$= (x_2 - x_3) + (y_2 - y_3) = f(x) + f(y),$$

$$f(\lambda x) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix} = \lambda x_2 - \lambda x_3 = \lambda(x_2 - x_3) = \lambda \cdot f(x).$$

Dunque f è un'applicazione lineare.

Inoltre risulta

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^4 : f(x) = x_2 - x_3 = 0\} =$$

$$= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_2 = x_3 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Siccome tali vettori sono linearmente indipendenti, si ha che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\ker f$.

▨

Es 2

Dimostrare che, per ogni $h \in \mathbb{R}$, l'applicazione

$$T_h : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$$

$$T_h(aX^2+bX+c) = (X+h)(aX+c)$$

è lineare. Trovare inoltre i valori di h per cui l'applicazione è iniettiva e quelli per cui essa è suriettiva.

SOL

Dati due polinomi $P_1(X) = a_1X^2+b_1X+c_1$, $P_2(X) = a_2X^2+b_2X+c_2$, si ha

$$T_h(P_1(X)+P_2(X)) = T_h\left((a_1+a_2)X^2+(b_1+b_2)X+(c_1+c_2)\right) =$$

$$= (X+h)\left[(a_1+a_2)X+c_1+c_2\right] =$$

$$= (X+h)\left[(a_1X+c_1)+(a_2X+c_2)\right] =$$

$$= (X+h)(a_1X+c_1) + (X+h)(a_2X+c_2) =$$

$$= T_h(P_1(X)) + T_h(P_2(X)).$$

Analogamente se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P(X) = aX^2+bX+c$, risulta

$$T_h(\lambda P(X)) = T_h(\lambda aX^2+\lambda bX+\lambda c) = (X+h)(\lambda aX+\lambda c) =$$

$$= \lambda(X+h)(aX+c) = \lambda \cdot T_h(P(X)).$$

Dunque T_h è un'applicazione lineare per ogni $h \in \mathbb{R}$.
Osserviamo che

$$P(x) \in \operatorname{Ker} T_h \iff (x+h)(ax+e) = 0,$$

ossia

$$ax^2 + (e+ah)x + eh = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ e + ah = 0 \\ eh = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \end{cases}.$$

Quindi $P(x) \in \operatorname{Ker} T_h$ se e solo se $P(x) = bx$, con $b \in \mathbb{R}$.
In altre parole, si ha $\operatorname{Ker} T_h = \operatorname{Span}(x)$. Pertanto T_h non è mai iniettiva. Siccome T_h è un endomorfismo, allora non è suriettiva per alcun valore di $h \in \mathbb{R}$.

Es 3

Sia

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

SOL

Ricordiamo che

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

In altre parole, bisogna risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Risulta

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -5x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 2x_1 + x_2 + 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -5x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 7x_1 + 3x_2 \end{cases}.$$

Pertanto si ha

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -5x_1 - 2x_2 \\ 7x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Siccome i due vettori ottenuti sono linearmente indipendenti, l'insieme

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\operatorname{Ker} f$. Inoltre, si ha

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ per qualche } x \in \mathbb{R}^4 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ne segue che

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Siccome i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, si ha

$$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2.$$

Pertanto l'insieme

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathrm{Im}\, f$.

Es 4

Sia $f: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

SOL

$\Rightarrow$ Supponiamo che f sia iniettiva. Allora, posto

$$\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0,$$

si ha

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0$$

($\ker f = \{0\}$) $\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$ ($\mathcal{B}$ base di V)

Dunque $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

$\Leftarrow$ Supponiamo ora che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ siano linearmente indipendenti. Se $v \in \ker f$, si ha

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

e inoltre $f(v) = 0$. Ne segue che

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \overset{\text{(linearità di } f)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$$

(indip. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_n)$) $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow v = 0.$

Ciò significa che

$$\ker f = \{0\},$$

ossia f è iniettiva.

02/11/20

Esercitazione 9

Traccia di una matrice.

Matrici simmetriche e antisimmetriche.

DEF

Sia $A := (a_{i,j}) \in M(n, n, \mathbb{F})$. La traccia della matrice A è

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i},$$

ossia la somma di tutti gli elementi situati sulla diagonale principale di A. Definiamo inoltre la seguente funzione:

$$\mathrm{Tr} : M(n, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$A \longmapsto \mathrm{Tr}\, A.$$

ES 1

Dimostrare che $\mathrm{Tr} : M(n, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ è un'applicazione lineare.

SOL

Consideriamo $A, B \in M(n, n, \mathbb{F})$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Risulta

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,i} + b_{i,i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B,$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \lambda\, \mathrm{Tr}\,A,$$

dove $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$. Pertanto Tr è un'applicazione lineare.

Es 2

Siano $A \in M(m, n, \mathbb{F})$, $B \in M(n, m, \mathbb{F})$. Provare che

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

SOL

Posto $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, risulta

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}, \qquad (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}\, a_{k,j}.$$

Ne segue che

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i}.$$

Scambiando i nomi degli indici i, k si ottiene

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}\, b_{i,k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}\, a_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{i,i} = \mathrm{Tr}(BA).$$

▨

DEF

Una matrice $A \in M(n, n, \mathbb{F})$ è detta <u>simmetrica</u> se

$$A^T = A.$$

L'insieme di tutte le matrici simmetriche di ordine n sarà denotato con $Sym(n, \mathbb{F})$. Invece, una matrice $A \in M(n, n, \mathbb{F})$ è detta <u>antisimmetrica</u> se

$$A^T = -A.$$

L'insieme di tutte le matrici antisimmetriche di ordine n sarà denotato con $Skew\text{-}Sym(n, \mathbb{F})$.

OSS

In altre parole, una matrice $A = (a_{i,j}) \in M(n, n, \mathbb{F})$ è simmetrica se $a_{i,j} = a_{j,i}$ per ogni coppia di indici i, j. Invece, essa è antisimmetrica se $a_{i,j} = -a_{j,i}$ per ogni coppia di indici i, j; in particolare si ha $a_{i,i} = 0$ per ogni i.

Es 3

Dimostrare che

$$M(n,n,\mathbb{F}) = Sym(n,\mathbb{F}) \oplus Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F}).$$

SOL

Sia $A \in M(n,n,\mathbb{F})$. Risulta

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}.$$

Osserviamo che, posto $A_1 := \frac{A+A^T}{2}$, $A_2 := \frac{A-A^T}{2}$, si ha

$$A_1^T = \left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T+A}{2} = \frac{A+A^T}{2} = A_1$$

$$\Rightarrow A_1 \in Sym(n,\mathbb{F}),$$

$$A_2^T = \left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T-A}{2} = -\frac{A-A^T}{2} = -A_2$$

$$\Rightarrow A_2 \in Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F}).$$

Allora $A = A_1 + A_2$, dove $A_1 \in Sym(n,\mathbb{F})$, $A_2 \in Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F})$.

Ciò significa che

$$M(n,n,\mathbb{F}) = Sym(n,\mathbb{F}) + Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F}).$$

Sia $A \in Sym(n,\mathbb{F}) \cap Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F})$. Allora si ha

$$A^T = A, \quad A^T = -A.$$

Dunque

$$A = -A \Rightarrow A = \underline{0}.$$

Pertanto si ha $Sym(n,\mathbb{F}) \cap Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F}) = \{0\}$.
Ne segue che

$$M(n,n,\mathbb{F}) = Sym(n,\mathbb{F}) \oplus Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F}).$$

▨

Es 4

Calcolare una base di $Sym(n,\mathbb{F})$ e $Skew\text{-}Sym(n,\mathbb{F})$.
Calcolare inoltre la loro dimensione.

SOL

Indichiamo con $E_{i,j} \in M(n,n,\mathbb{F})$ la matrice che ha "1" in posizione ij e "0" altrove. Se $A = (a_{i,j}) \in Sym(n,\mathbb{F})$, allora si ha

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{\substack{j>i \\ 1 \le i,j \le n}} a_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}).$$

In altre parole, risulta

$$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{F}) = \mathrm{Span}\left(\{E_{i,i}\}_{i=1,\dots,n}, \{E_{i,j}+E_{j,i}\}_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}} \right).$$

L'insieme $\mathcal{B} = \left\{ \{E_{i,i}\}_{i=1,\dots,n}, \{E_{i,j}+E_{j,i}\}_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}} \right\}$ è una base di $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{F})$ poiché i suoi elementi sono linearmente indipendenti. Il numero di elementi di $\mathcal{B}$ è uguale al numero degli elementi della matrice indicati di seguito:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

← n elementi
← $n-1$ elementi
← $n-2$ elementi
⋮
← 1 elemento

Pertanto si ha

$$\dim \mathrm{Sym}(n,\mathbb{F}) = n + n-1 + n-2 + \dots + 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Consideriamo adesso una matrice $A \in \mathrm{Skew\text{-}Sym}(n,\mathbb{F})$.

In tal caso si ha

$$A = \sum_{\substack{i<j \\ 1\le i,j\le n}} a_{i,j}\,(E_{i,j} - E_{j,i}).$$

Quindi si ha

$$\mathrm{Skew\text{-}Sym}(n,\mathbb{F}) = \mathrm{Span}\left(\left\{E_{i,j} - E_{j,i}\right\}_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}}\right).$$

L'insieme $\mathcal{B}' = \left\{E_{i,j} - E_{j,i}\right\}_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}}$ è una base di $\mathrm{Skew\text{-}Sym}(n,\mathbb{F})$ poiché i suoi elementi sono linearmente indipendenti. Il numero di elementi di $\mathcal{B}'$ è uguale al numero degli elementi della matrice indicati di seguito:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow n-1$ elementi

$\leftarrow n-2$ elementi

$\leftarrow n-3$ elementi

$\leftarrow 1$ elemento

Pertanto si ha

$$\dim \mathrm{Skew\text{-}Sym}(n, \mathbb{F}) = n-1+n-2+n-3+\dots+1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}.$$

04/11/20

Esercitazione 10

Applicazioni lineari e matrici

Es 1

Data l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, x+y)$, determinare la matrice associata ad f relativa alle basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

nel dominio e nel codominio rispettivamente.

SOL

Risulta

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

▨

OSS

Perché $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ si chiama matrice associata ad f rispetto alle basi scelte? Supponiamo di voler calcolare $f\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Esprimiamo il vettore $\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} = \textcircled{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \textcircled{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

coordinate di $\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$

Risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Le componenti di $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $f\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Infatti si ha

$$\textcircled{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \textcircled{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Es 2

Consideriamo l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

$$f(ax^2+bx+c) = ax+b.$$

Determinare l'applicazione associata ad f rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\},$$

$$\mathcal{B}' = \{1, 2x, x^2-x\}$$

nel dominio e nel codominio rispettivamente.

sol

Si ha

$$f(1) = 0 = \textcircled{0}\cdot 1 + \textcircled{0}\cdot 2x + \textcircled{0}\cdot (x^2-x),$$

$$f(x-1) = 1 = \textcircled{1}\cdot 1 + \textcircled{0}\cdot 2x + \textcircled{0}\cdot (x^2-x),$$

$$f((x-1)^2) = f(x^2-2x+1) = x-2 =$$

$$= \textcircled{-2}\cdot 1 + \textcircled{\frac{1}{2}}\cdot 2x + \textcircled{0}\cdot (x^2-x).$$

Quindi la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

OSS

Supponiamo di voler calcolare $f(2x^2-2x+1)$ utilizzando la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$. Pertanto calcoliamo le coordinate di $2x^2-2x+1$ rispetto a $\mathcal{B}$:

$$2x^2-2x+1 = \textcircled{1}\cdot 1 + \textcircled{2}\cdot(x-1) + \textcircled{2}\cdot(x-1)^2.$$

Risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Coordinate di $f(2x^2-2x+1)$ rispetto a $\mathcal{B}'$

ossia

$$-2\cdot 1 + 1\cdot 2x + 0\cdot(x^2-x) = 2x-2 = f(2x^2-2x+1).$$

Es 3

Sia

$$f_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f_a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \\ x+ay \end{pmatrix}$$

un'applicazione lineare, dove $a \in \mathbb{R}$. Trova:

(a) la matrice A associata ad f_a rispetto alle basi canoniche;

(b) i valori $a \in \mathbb{R}$ per cui f_a è iniettiva;

(c) i valori $a \in \mathbb{R}$ per cui f_a è suriettiva.

SOL

(a) Risulta

$$f_a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice associata ad f_a rispetto alle basi canoniche è

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Il nucleo di f_a è dato da

$$\operatorname{Ker} f_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : M_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{0} \right\}.$$

Bisogna dunque risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ x + ay = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y \\ -4y + 4y = 0 \\ -2y + ay = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ (a-2)y = 0 \end{cases}.$$

Se $a = 2$ si ha

$$\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

per cui f_2 <u>non</u> è iniettiva.

Se $a \neq 2$ si ha

$$\operatorname{Ker} f_a = \{\underline{0}\}.$$

Quindi f_a è iniettiva se e solo se $a \neq 2$.

(c) Per il teorema di nullità più rango si ha

$$\dim \operatorname{Im} f_a = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Ker} f_a.$$

Pertanto, se $a = 2$ si ha

$$\dim \operatorname{Im} f_2 = 2 - 1 = 1;$$

se $a \neq 2$ si ha

$$\dim \operatorname{Im} f_a = 2 - 0 = 2.$$

Dunque f_a non è mai suriettiva.

∎

Es 4

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

consideriamo $W = \{X \in M(2,2,\mathbb{R}) : A \cdot X = \underline{0}\}$. Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbb{R})$ e calcolarne una base e la dimensione.

SOL

Poniamo

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Allora $X \in W$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha

$$\begin{cases} 4a - c = 0 \\ 4b - d = 0 \\ -8a + 2c = 0 \\ -8b + 2d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 4a \\ d = 4b \\ -8a + 8a = 0 \checkmark \\ -8b + 8b = 0 \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 4a \\ d = 4b \end{cases}.$$

Ne segue che

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4a & 4b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right).$$

Pertanto W è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbb{R})$. Siccome le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di W. Di conseguenza si ha $\dim W = 2$.

▨

Es 5

Consideriamo una matrice $A \in M(n,n,\mathbb{R})$ tale che

$$AB = BA \quad \text{per ogni } B \in M(n,n,\mathbb{R}).$$

Mostrare che $A = \lambda \cdot I_n$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, dove I_n è la matrice identità.

SOL

Indichiamo con $E_{i,j} \in M(n,n,\mathbb{R})$ la matrice che ha "1" in posizione i,j e "0" altrove. Prendendo $B = E_{1,1}$ si ottiene

$$A \cdot E_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} \cdot A$$

$$\Rightarrow a_{2,1} = \dots = a_{n,1} = a_{1,2} = \dots = a_{1,n} = 0.$$

Scegliendo $B = E_{i,i}$ per ogni $i = 1, \dots, n$ si ottiene $a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$. Ciò significa che A ha la seguente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo $B = E_{1,2}$ si ottiene

$$A \cdot E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} \cdot A$$

$$\Rightarrow a_{1,1} = a_{2,2}.$$

Analogamente, scegliendo $B = E_{1,i}$ per ogni $i = 3, \dots, n$, si ha

$$a_{1,1} = a_{3,3} = \dots = a_{n,n}.$$

Pertanto, posto $\lambda := a_{1,1}$, si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot I_n.$$

09/11/20

Esercitazione 11

Sistemi lineari e matrici

Es 1

Calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOL

Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss riduciamo a scala la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 3 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2 \cdot R_2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} \end{pmatrix}.$$

Pivots

Poiché il rango di una matrice è uguale al numero di pivots che compaiono nella sua riduzione a scala, si ha

$$\operatorname{rank}(A) = 3.$$

Es 2

Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il rango della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sol

Riducendo la matrice a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 + R_1 \\ R_4 - 3 \cdot R_1 \\ R_5 - 3 \cdot R_1}]{R_2 - 2 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 12 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5 - 3\cdot R_2]{R_3 - R_2,\ R_4 - 2\cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5 - 2\cdot R_3]{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_5} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{2-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\alpha \neq 2$ ci sono quattro pivots e quindi si ha $\operatorname{rank}(M) = 4$; altrimenti, se $\alpha = 2$ si ha $\alpha - 2 = 0$. Dunque in tal caso i pivots sono tre e si ha $\operatorname{rank}(M) = 3$.

∎

Es 3

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 10 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

SOL

La matrice associata al nostro sistema lineare è

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & 6 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

dove A è la matrice dei coefficienti e b è il vettore dei termini noti. Per studiare la compatibilità del sistema, riduciamo a scala la matrice ad esso associata:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & 6 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4+R_1]{\substack{R_2-2\cdot R_1 \\ R_3-3\cdot R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4-3\cdot R_2]{R_3+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-2\cdot R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1} \end{array}\right).$$

Risulta

$$\operatorname{rank}(A) = 3 \neq 4 = \operatorname{rank}(A|b).$$

Per il teorema di Rouché - Capelli il sistema considerato non ammette soluzione. ▨

Es 4

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 5x_6 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 3x_5 + 16x_6 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 + 2x_6 = 5 \end{cases}$$

SOL

Consideriamo la matrice associata al sistema e riduciamola a scala:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 12 & 3 & 16 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -8 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 + R_1]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2\cdot R_1}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -1 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 - R_2]{R_3 - 3\cdot R_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 + 2\cdot R_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & 2 \end{array}\right).$$

Osserviamo che

$$\operatorname{rank}(A) = 4 = \operatorname{rank}(A|b).$$

Pertanto il sistema è compatibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione

$$\dim S = 6 - \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Per calcolare esplicitamente le soluzioni, consideriamo il sistema ridotto a scala. Dunque si ha

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_3 + x_4 + 4x_6 = 1 \\ 3x_4 - x_5 + 2x_6 = -1 \\ 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 - \frac{2}{3} \\ 2x_3 = -x_4 - \frac{8}{3} + 1 \\ 3x_4 = -1 + x_5 - \frac{4}{3} \\ x_6 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - 3\left(\frac{1}{3}x_5 - \frac{7}{9}\right) - 2x_5 - \frac{2}{3} \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}x_5 + \frac{7}{9} - \frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{6}x_5 - \frac{8}{18} \\ x_4 = \frac{1}{3}\left(x_5 - \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}x_5 - \frac{7}{9} \\ x_6 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{4}{9} - x_5 + \frac{7}{3} - 2x_5 - \frac{2}{3} \\ x_3 = -\frac{1}{6}x_5 - \frac{4}{9} \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5 - \frac{7}{9} \\ x_6 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - \frac{19}{6}x_5 + \frac{11}{9} \\ x_3 = -\frac{1}{6}x_5 - \frac{4}{3} \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5 - \frac{7}{9} \\ x_6 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Pertanto lo spazio delle soluzioni è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - \frac{19}{6}x_5 + \frac{11}{9} \\ x_2 \\ -\frac{1}{6}x_5 - \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3}x_5 - \frac{7}{9} \\ x_5 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} : x_2, x_5 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{19}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \frac{11}{9} \\ 0 \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

▨

11/11/20

Esercitazione 12

Applicazioni geometriche di matrici e sistemi lineari

Es 1

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca delle rette

$$r: X + \alpha Y + \alpha = 0, \qquad s: \alpha X + Y - \alpha = 0.$$

SOL

Per determinare la posizione reciproca di r ed s, bisogna studiare il sistema

$$\begin{cases} X + \alpha Y + \alpha = 0 \\ \alpha X + Y - \alpha = 0 \end{cases}.$$

Consideriamo la matrice associata e riduciamola a scala:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \alpha \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & \alpha+\alpha^2 \end{array}\right).$$

Se $\alpha \neq \pm 1$ si ha

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, l'intersezione delle due rette è uno spazio di dimensione 0. In altre parole r ed s sono trasversali. Se invece $\alpha = 1$, si ha la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Quindi

$$\operatorname{rank}(A|b) = 2 \neq 1 = \operatorname{rank}(A).$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema non è compatibile. Ciò significa che r ed s sono parallele.
Infine, se $\alpha = -1$ si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ne segue che

$$\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A) = 1.$$

Per il teorema di Rouché - Capelli, l'intersezione di r ed s è uno spazio di dimensione 1. In altre parole r ed s coincidono.

∎

Es 2

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti piani di $\mathbb{R}^3$

$$x + 3y - \alpha z = 4, \quad x + 8y + (\alpha - 1)z = 2 + 2\alpha,$$

$$2x + \alpha y - 3z = 8$$

si intersecano in una retta?

SOL

Bisogna studiare il sistema

$$\begin{cases} x + 3y - \alpha z = 4 \\ x + 8y + (\alpha - 1)z = 2 + 2\alpha \\ 2x + \alpha y - 3z = 8 \end{cases}.$$

Perciò si ha

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -\alpha & 4 \\ 1 & 8 & \alpha-1 & 2+2\alpha \\ 2 & \alpha & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2\cdot R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -\alpha & 4 \\ 0 & 5 & 2\alpha-1 & 2\alpha-2 \\ 0 & \alpha-6 & 2\alpha-3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-\frac{1}{5}\cdot(\alpha-6)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -\alpha & 4 \\ 0 & 5 & 2\alpha-1 & 2\alpha-2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5}(\alpha-1)(2\alpha-21) & -\frac{2}{5}(\alpha-6)(\alpha-1) \end{array}\right).$$

Affinché lo spazio delle soluzioni sia una retta, si deve avere

$$\operatorname{rank}(A|b)=\operatorname{rank}(A)=2,$$

ossia $\alpha=1$.

Es 3

Determinare, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la posizione reciproca delle seguenti rette di $\mathbb{R}^3$:

$$r:\begin{cases} -x+y+z-k=0 \\ y+kz+1=0 \end{cases}, \qquad s:\begin{cases} -x+ky+z=0 \\ kx+y+z+1=0 \end{cases}.$$

SOL

Bisogna considerare il sistema

$$\begin{cases} -x+y+z=k \\ y+kz=-1 \\ -x+ky+z=0 \\ kx+y+z=-1 \end{cases}$$

Dunque si ha

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k & -1 \\ -1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4+k\cdot R_1]{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & k-1 & 0 & -k \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4-(k+1)\cdot R_2]{R_3-(k-1)\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & -k^2+k & -1 \\ 0 & 0 & -k^2+1 & +k^2+k \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & -k^2-k-1 \\ 0 & 0 & -k^2+1 & k^2+k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4+(k+1)\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 1 & 1 & k \\ 0 & \boxed{1} & k & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{k-1} & -k^2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-(k+1)(k^2+1)} \end{array}\right).$$

Se $k=-1$ si ottiene

$$\operatorname{rank}(A|b) = 3 = \operatorname{rank}(A),$$

ossia le due rette sono incidenti. Se $k=1$ si ha

$$\operatorname{rank}(A|b) = 3 \neq 2 = \operatorname{rank}(A),$$

quindi le due rette non si intersecano. Bisogna però stabilire se esse siano parallele oppure sghembe. A tal proposito consideriamo il sistema omogeneo associato, il che corrisponde a traslare le due rette nell'origine. La matrice ridotta a scala corrispondente al sistema omogeneo è:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché essa ha rango uguale a 2, lo spazio delle soluzioni ha dimensione

$$\dim S = 3 - 2 = 1.$$

Ciò significa che, le due rette traslate nell'origine coincidono. Dunque le rette r ed s sono parallele, poiché hanno la stessa direzione. Se $k \neq \pm 1$, risulta

$$\operatorname{rank}(A|b) = 4 \neq 3 = \operatorname{rank}(A).$$

Anche stavolta le due rette <u>non</u> si intersecano, però considerando il sistema omogeneo associato si ottiene la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & k \\ 0 & 0 & \boxed{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché essa ha rango uguale a tre, lo spazio delle soluzioni ha dimensione

$$\dim S = 3 - 3 = 0.$$

Ciò significa che le rette traslate nell'origine sono incidenti, essa hanno direzioni diverse. Pertanto le rette r ed s sono sghembe.

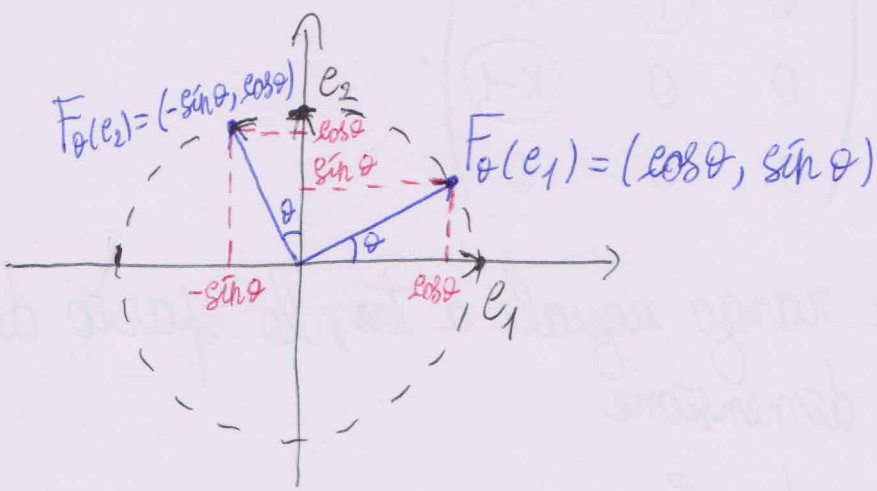
Es 4

Sia $F_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che ruota i punti del piano di un angolo θ in senso antiorario. Si determini la matrice M_θ associata ad F_θ rispetto alle basi canoniche. Inoltre si dimostri che

$$F_{\theta+\theta'} = F_\theta \circ F_{\theta'}, \qquad F_\theta^{-1} = F_{-\theta}.$$

SOL

Le immagini di e_1 ed e_2 tramite F_θ sono di seguito rappresentate:



Dunque si ha

$$F_\theta(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2,$$

$$F_\theta(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2.$$

Pertanto, la matrice associata è:

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dimostriamo adesso che $F_\theta^{-1} = F_{-\theta}$. Basta dimostrare che

$$M_{-\theta} = M_\theta^{-1}.$$

Osserviamo che

$$M_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Allora si ha

$$M_{-\theta} \cdot M_\theta = M_\theta \cdot M_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Ne segue che $M_{-\theta} = M_\theta^{-1}$.

Dimostriamo infine che $F_{\theta+\theta'} = F_\theta \circ F_{\theta'}$. Basta mostrare che

$$M_{\theta+\theta'} = M_\theta \cdot M_{\theta'},$$

Si ha

$$M_{\theta+\theta'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = M_\theta \cdot M_{\theta'},$$

ossia la tesi.

16/11/20

Esercitazione 13

Determinante, inversa di una matrice

Es 1

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOL

1° metodo (riduzione di Gauss)

Riduciamo a scala la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 8\cdot R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - \frac{2}{11}\cdot R_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{67}{11} \end{pmatrix}.$$

Poiché le operazioni elementari che abbiamo effettuato lasciano invariato il determinante, si ha

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{67}{11} \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \cancel{11} \cdot \frac{67}{\cancel{11}} = 134.$$

2° metodo (sviluppo di Laplace)

Sviluppando il determinante rispetto alla quarta riga si ottiene

$$\det(A) = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando ora rispetto alla seconda riga, si ha

$$\det(A) = -2\left(1\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 0\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & 5\end{vmatrix}\right) +$$

$$+\left(1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 6 & 3\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & 5\end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2\left(-24 - 2\cdot(10+6)\right) + \left(6 + (10+6)\right) =$$

$$= -2(-56) + 22 = +112 + 22 = 134.$$

Es 2

Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice è invertibile.

SOL

Utilizzando lo sviluppo di Laplace, risulta

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & K & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} K & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & K \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(K-1) - 2(-1-K) = 4K.$$

La matrice è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$, ossia se e solo se $K \neq 0$.

Es 3

Calcolare, se esiste, l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

SOL

Prima di tutto osserviamo che

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Pertanto la matrice A è invertibile. Calcoliamone l'inversa.

1° metodo (matrice dei cofattori)

Indichiamo con $A_{i,j}$ la sottomatrice di A, ottenuta cancellando da A la riga i e la colonna j. Risulta

$$\det(A_{1,1}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \det(A_{1,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \det(A_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\det(A_{2,1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad \det(A_{2,2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \det(A_{2,3}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\det(A_{3,1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \det(A_{3,2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \det(A_{3,3}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

La matrice dei cofattori è data da

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} \det(A_{1,1}) & -\det(A_{2,1}) & \det(A_{3,1}) \\ -\det(A_{1,2}) & \det(A_{2,2}) & -\det(A_{3,2}) \\ \det(A_{1,3}) & -\det(A_{2,3}) & \det(A_{3,3}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2° metodo (algoritmo di Gauss - Jordan)

Consideriamo la matrice

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ed effettuiamo le operazioni elementari necessarie a ridurre la matrice A alla matrice identità. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1+3\cdot R_3]{R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) = (I \mid A^{-1}).$$

Pertanto si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

18/11/20

Esercitazione 14

Regola di Cramer. Determinante e rango. Matrice di Vandermonde. Autovalori e autovettori.

Es

Risolvere il seguente sistema utilizzando la regola di Cramer

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 7 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}.$$

sol

Consideriamo la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti associati al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con A^1, A^2, A^3 le colonne della matrice A.

Risulta

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 - 1 + 1 - 2 - 2 - 8 = -14 \neq 0.$$

Pertanto $\operatorname{rank}(A) = n$ e di conseguenza il sistema ammette un'unica soluzione. Calcoliamo i determinanti delle seguenti matrici:

$$M_x = \left(b \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, A^3 \right), \quad M_y = \left(A^1 \,\middle|\, b \,\middle|\, A^3 \right), \quad M_z = \left(A^1 \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, b \right).$$

Si ha

$$D_x := \det(M_x) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2-1) + (-7-3) + 2(7-6) = -6 - 10 + 2 = -14.$$

Allo stesso modo si ha

$$D_y := \det(M_y) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 - 3 - 2(1-2) + 2(-3-14) =$$

$$= -10 + 2 - 34 = -42,$$

$$D_z := \det(M_z) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-7) + (-3-14) + 2(-1-4) =$$

$$= -1 - 17 - 10 = -28.$$

Per il teorema di Cramer la soluzione è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x/D \\ D_y/D \\ D_z/D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14/(-14) \\ -42/(-14) \\ -28/(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es 2

Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 0 & k-1 & 2k \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOL

Risulta

$$\det(A_k) = (k-1)\begin{vmatrix} k & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2k\begin{vmatrix} k & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (k-1)(2k-12) - 2k(k-4) =$$

$$= \cancel{2k^2} - 12k - 2k + 12 - \cancel{2k^2} + 8k =$$

$$= -6k + 12.$$

Se $k \neq 2$ si ha $\det(A_k) \neq 0$ e di conseguenza $\operatorname{rank}(A_k) = 3$.

Se $k = 2$ si ottiene

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per determinare il rango di A_2 bisogna trovare l'ordine più grande tra tutte le sue sottomatrici con determinante non nullo. Basta considerare la sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det(A_2) = 0$ e $\det(B) = 2 \neq 0$ si ha $\operatorname{rank}(A_2) = 2$.

Es 3 (Determinante di Vandermonde)
Dati $n \geq 2$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$, consideriamo

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M(n, n, \mathbb{F}).$$

Dimostrare che

$$\det(A_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

SOL

Procediamo per induzione su n. Per $n=2$ si ha

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \det(A_2) = a_2 - a_1. \ \checkmark$$

Supponiamo allora la tesi vera per A_{n-1} e dimostriamola per A_n. Moltiplichiamo la colonna $(i-1)$-esima di A_n per a_1 e sottraiamola dalla successiva per $i = n, \dots, 2$:

$$A_n \xrightarrow[i=n,\dots,2]{\mathcal{C}_i - a_1 \cdot \mathcal{C}_{i-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga si ottiene

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3(a_3-a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}.$$

Per l'omogeneità del determinante rispetto alle colonne si ha

$$\det(A_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \cdots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Per l'ipotesi induttiva si ha

$$\det(A_n) = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n} (a_j - a_i) =$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

∎

Es 4

Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolarne il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori.

SOL

Risulta

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (3-\lambda)^2 - 4 =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

Gli autovalori di A sono le radici del suo polinomio caratteristico, ossia

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$$

L'insieme di tutti gli autovettori relativi ad un autovalore fissato λ (unito allo zero) costituisce l'autospazio V_λ. Pertanto determiniamo gli autospazi di A. Si ha

$$V_{\lambda_1} = V_1 = \ker(A - 1 \cdot I_2).$$

Bisogna dunque risolvere il sistema

$$(A - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y.$$

Pertanto si ha

$$V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Analogamente si ha

$$V_5 = \mathrm{Ker}\,(A - 5I_2)$$

$$\Rightarrow (A - 5I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ \\ +x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow V_5 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Es 5

Trovare il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol

Poiché A è una matrice triangolare inferiore si ha

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Dunque gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Determiniamone gli autospazi:

$$V_1 = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \ker(A - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$V_1: \begin{cases} 2x = 0 \\ x = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_3: \begin{cases} 0 = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 4y + 2y = 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 3y \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es 6

Calcolare polinomio caratteristico, autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOL

Il polinomio caratteristico è dato da

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. I corrispondenti autospazi sono dati da:

$$V_1: \quad \operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 5z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_1 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_3: \quad \operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{2}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2}z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

23/11/20

Esercitazione 15

Matrice di cambiamento di base, diagonalizzazione di matrici.

Es 1

Siano

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le basi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.
Trovare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

SOL

Sia $x = (x_1, x_2, x_3)$ il vettore delle coordinate di un punto di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Vogliamo trovare le coordinate di tale punto rispetto alla base $\mathcal{C}$,

ossia il vettore $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ tale che

$$X_1 V_1 + X_2 V_2 + X_3 V_3 = Y_1 W_1 + Y_2 W_2 + Y_3 W_3 .$$

In altre parole, se poniamo

$$B := \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right), \qquad \mathcal{C} := \left(W_1 \middle| W_2 \middle| W_3 \right)$$

la relazione precedente è equivalente alla seguente:

$$B X = \mathcal{C} Y .$$

Pertanto, risulta

$$Y = \mathcal{C}^{-1} B X .$$

Quindi la matrice di cambiamento di base è

$$N := \mathcal{C}^{-1} B .$$

Calcoliamola esplicitamente. Prima di tutto determiniamo l'inversa di $\mathcal{C}$ utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{2} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2 R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ne segue che

$$\mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha

$$N = \mathcal{C}^{-1} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

OSS

Ricordiamo che la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ coincide con la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)$ associata all'identità rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{C}$ nel codominio:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= (-1)\cdot W_1 + (0)\cdot W_2 + (0)\cdot W_3 \\ V_2 &= (0)\cdot W_1 + (-3)\cdot W_2 + (5)\cdot W_3 \\ V_3 &= (-1)\cdot W_1 + (-1)\cdot W_2 + (2)\cdot W_3 \end{aligned}\right\| \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es 2

Sia $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ una base di $\mathbb{R}^2$ e sia $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo tale che

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori e gli autospazi di T, dimostrare che T è diagonalizzabile e trovare una base rispetto a cui la matrice associata a T è diagonale.

SOL

Calcoliamo la matrice A associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori di T:

$$P_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = 6 - \lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda(\lambda - 7)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 7.$$

La molteplicità algebrica degli autovalori λ_1, λ_2 è

$$m_a(0) = 1, \quad m_a(7) = 1.$$

Gli autospazi di A sono dati da

$$V_0: \quad \ker(A - 0 \cdot I_2) = \ker(A) \Rightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$V_7 = \ker(A - 7\cdot I_2) = \ker\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x + 3y = 0 \\ \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A - 7I_2) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Ricordiamo però che A rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B}$ (non rispetto alla base canonica!). Pertanto, i vettori $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ dei generatori di V_0, V_7 rispettivamente. Dunque si ha

$$(-3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

Coordinate →

$$(1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto risulta

$$V_0 = \ker(T) = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad V_7 = \ker(T - 7\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la molteplicità geometrica dei due autovalori è

$$m_g(0)=1, \quad m_g(7)=1.$$

Pertanto T è diagonalizzabile e una base che diagonalizza T è data da

$$\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Infatti, cambiando base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, si ottiene

$$N=M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id)=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad N^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-7}$$

$$\Rightarrow D:=N^{-1}AN=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -7 & -21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}.$$

▨

25/11/20

Esercitazione 16

Diagonalizzazione di matrici, spazi vettoriali euclidei.

Es 1

Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Nel caso in cui lo sia, trovare la matrice di cambiamento di base N tale che $D := N^{-1} A N$ sia una matrice diagonale.

SOL

Risulta

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2] = (2-\lambda)(4-4\lambda-\lambda+\lambda^2+2) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) =$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

Dunque si hanno i seguenti autovalori con le rispettive molteplicità geometriche:

$$\lambda_1 = 2, \qquad m_a(2) = 2,$$

$$\lambda_2 = 3, \qquad m_a(3) = 1.$$

Calcoliamo ora gli autospazi

$$V_2 = \ker(A - 2\cdot I_3), \qquad V_3 = \ker(A - 3\cdot I_3).$$

Si ha

$$V_2: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad m_g(2) = \dim V_2 = 1.$$

$$V_3: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ -2y-z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x \\ z=-2y=-2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right), \quad m_g(3) = \dim V_3 = 1.$$

Poiché la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di 2, non coincidono, la matrice A non è diagonalizzabile.

Es 2

Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Nel caso in cui lo sia, trovare la matrice di cambiamento di base N tale che $D := N^{-1} A N$ sia una matrice diagonale.

SOL

Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2.$$

Pertanto gli autovalori di A e le corrispondenti molteplicità algebriche sono

$$\lambda_1 = 0, \qquad m_a(0) = 1,$$

$$\lambda_2 = 2, \qquad m_a(2) = 2.$$

Gli autospazi sono dati da

$$V_0 = \mathrm{Ker}(A), \qquad V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2 \cdot I_3).$$

Dunque si ha

$$V_0: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2y=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad m_g(0) = 1.$$

Analogamente risulta

$$V_2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ 0=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y+z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad m_g(2) = 2.$$

Poiché la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di λ_1, λ_2 coincidono, la matrice A è diagonalizzabile. In altre parole esiste una matrice invertibile N tale che $D := N^{-1} \cdot A \cdot N$ sia una matrice diagonale. Ricordiamo che per costruire N basta considerare la matrice che ha per colonne una base di ogni autospazio. Pertanto si ha

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Base di V_0 — Base di V_2

Verifichiamo che D è una matrice diagonale, i cui coefficienti non nulli sono gli autovalori di A ripetuti un numero di volte uguale alla loro molteplicità. A tal fine calcoliamo N^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to -R_1]{R_3 \to \frac{1}{2}\cdot R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + 2\cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha

$$D = N^{-1} A N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es 3

Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ ortogonali ad $n=(1,1,2,5)$. Trovare inoltre tutti i versori diretti come n.

SOL

Ricordiamo che un vettore $V=(x,y,z,w)$ è ortogonale ad n se e solo se $\langle V, n\rangle = 0$. Pertanto si ha

$$\langle V, n\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow x+y+2z+5w=0$$

$$\Rightarrow x=-y-2z-5w \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-2z-5w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Perciò l'insieme dei vettori ortogonali ad n è lo spazio

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Inoltre risulta

$$\|n\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2+5^2} = \sqrt{31}.$$

Quindi i due versori diretti come n sono dati da

$$n_1 = \frac{n}{\sqrt{31}}, \qquad n_2 = -\frac{n}{\sqrt{31}}.$$

30/11/20

Esercitazione 17

Algoritmo di Gram-Schmidt, complemento ortogonale di un sottospazio, matrici ortogonali. Esercizi di riepilogo.

Es 1

Sia

$$H: \quad x_1+x_2+x_3 = x_2+x_3+x_4 = 0$$

un piano di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base ortonormale di H e una base ortonormale di $H^\perp$.

SOL

Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in H \iff \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_2+x_3+x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_2-x_3 \\ x_4 = -x_2-x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_2-x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha

$$H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Osserviamo che, posto $v_1 := (-1,1,0,-1)^T$, $v_2 := (-1,0,1,-1)^T$, si ha

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 + 1 = 2,$$

ossia $\{v_1, v_2\}$ è una base non ortonormale di H. Utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt si ha

$$w_1 := v_1,$$

$$w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

I vettori w_1, w_2 costituiscono una base ortogonale di H. Notiamo che

$$\|w_1\| = \sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3},$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot (1+4+9+1)} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Pertanto una base ortonormale di H è data da

$$e_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{w_1}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$e_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{3}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ -2/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora il complemento ortogonale $H^\perp$ di H. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ossia la matrice tale che $H = \mathrm{Ker}(A)$. Osserviamo che le righe di A sono due vettori linearmente indipendenti ortogonali a $\mathrm{Ker}(A)$, per cui si ha

$$H^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

I vettori $v_3 := (1,1,1,0)^T$, $v_4 := (0,1,1,1)^T$ formano una base <u>non</u> ortonormale di $H^\perp$. Per l'algoritmo di Gram-Schmidt si ha

$$w_3 := v_3,$$

$$w_4 := v_4 - \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando si ottiene

$$e_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{w_3}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 := \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{w_4}{\sqrt{15}/3} = \frac{3}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{pmatrix}.$$

Una base ortonormale di $H^\perp$ è data da $\{e_3, e_4\}$.

Es 2

Sia $E \in M(n, n, \mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica ($E^T = -E$) tale che $I_n + E$ sia una matrice invertibile. Dimostrare che la matrice

$$Q := (I_n + E)^{-1} \cdot (I_n - E)$$

è ortogonale ($Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I_n$). Inoltre determinare Q nel caso in cui si abbia

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

SOL

Osserviamo che

$$(I_n - E)\cdot(I_n + E) = I_n - \cancel{E} + \cancel{E} - E^2 =$$

$$= I_n - E^2 = (I_n + E)\cdot(I_n - E).$$

Utilizzando questa uguaglianza, risulta

$$Q \cdot Q^T = \left[(I_n + E)^{-1}\cdot(I_n - E)\right]\cdot\left[(I_n + E)^{-1}\cdot(I_n - E)\right]^T =$$

$$= (I_n + E)^{-1}\cdot(I_n - E)\cdot(I_n - E)^T\cdot\left[(I_n + E)^{-1}\right]^T =$$

$$= (I_n + E)^{-1}\cdot(I_n - E)\cdot(I_n^T - E^T)\cdot\left[(I_n + E)^T\right]^{-1} =$$

$-E^T = E$

$$= (I_n + E)^{-1}\cdot(I_n - E)\cdot(I_n + E)\cdot(I_n + E^T)^{-1} =$$

$E^T = -E$

$$= (I_n + E)^{-1}\cdot\left[(I_n - E)\cdot(I_n + E)\right]\cdot(I_n - E)^{-1} =$$

$$= (I_n + E)^{-1}\cdot\left[(I_n + E)\cdot(I_n - E)\right]\cdot(I_n - E)^{-1} =$$

$$= \left[(I_n + E)^{-1}\cdot(I_n + E)\right]\cdot\left[(I_n - E)\cdot(I_n - E)^{-1}\right] =$$

$$= I_n \cdot I_n = I_n.$$

Dunque Q è una matrice ortogonale.

Consideriamo ora

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$I_n + E = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (I_n + E)^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n - E = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, risulta

$$Q = (I_n + E)^{-1} \cdot (I_n - E) = \frac{1}{1+\alpha^2} \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & 2\alpha \\ -2\alpha & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Es 3

Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario. Dimostrare che f non ha autovettori, ma che ogni $v \in \mathbb{R}^2$ è autovettore di f^3. Quali sono gli autovalori di f^3?

SOL

Ricordiamo che, rispetto alla base canonica, f è rappresentata da

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque il polinomio caratteristico di f è dato da

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Siccome $P_A(\lambda) \neq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, non esistono autovalori (e quindi autovettori) per f. Invece, per quanto riguarda f^3, osserviamo che si tratta di una rotazione in senso antiorario di angolo π. Pertanto f^3 è rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A^3 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

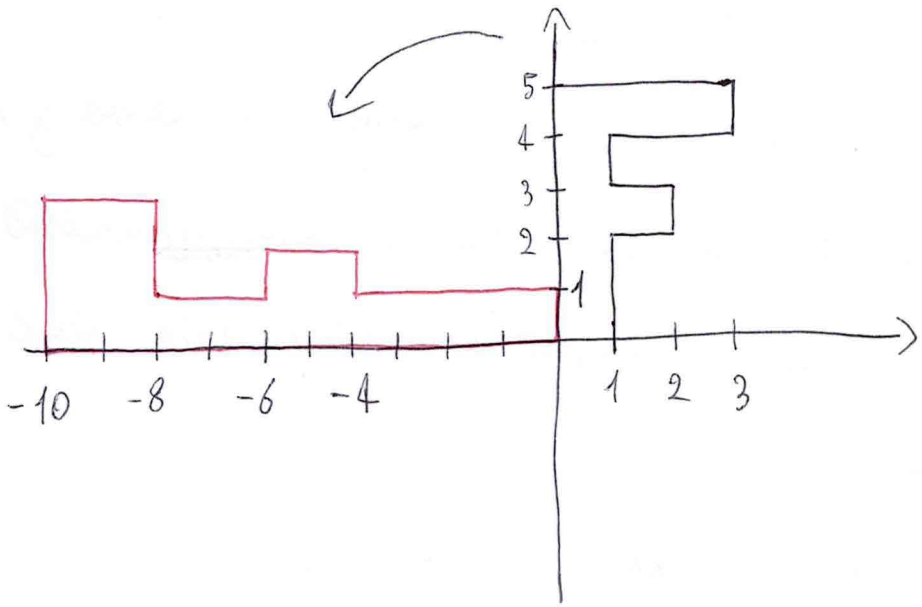
Si ha

$$A^3 v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -v,$$

dove $v = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$. In altre parole, ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$ è autovettore di f con autovettore -1. Perciò l'unico autovalore di f^3 è $\lambda = -1$.

Es 4

Trovare un'applicazione lineare $A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che trasformi la lettera "F" come indicato in figura:



Determinare anche A^{-1}.

SOL

Osserviamo che agisce sulla base canonica nel seguente modo:

$$A(e_1) = e_2,$$

$$A(e_2) = -2e_1.$$

Pertanto si ha

$$A(e_1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2,$$

$$A(e_2) = -2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$$

In altre parole, rispetto alla base canonica, l'applicazione A è rappresentata dalla matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque l'applicazione richiesta è

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$V \longmapsto \tilde{A} \cdot V.$$

L'applicazione inversa è rappresentata da

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\tilde{A})} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es 5

Sia $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ tale che $A \cdot A^T = I_n$. Dimostrare che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di A, allora $\lambda = -1$ oppure $\lambda = 1$.

SOL

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A. Allora esiste $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ tale che

$$AV = \lambda V.$$

Ricordando che $v^T \cdot v = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$, risulta

$$\|v\|^2 = v^T v = v^T I_n v = v^T (A^T A) v = (v^T A^T)(Av) =$$

$$= (Av)^T (Av) = \|Av\|^2 = \|\lambda v\|^2 = \lambda^2 \cdot \|v\|^2.$$

Ne segue che

$$\lambda^2 \cdot \|v\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow (\lambda^2 - 1) \cdot \|v\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

ES 6

Sia $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ tale che $A \cdot A^T = I_n$ e $\det(A) < 0$. Dimostrare che

$$\det(A + I_n) = 0,$$

ossia -1 è autovalore di A.

SOL

1° metodo

Risulta

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) =$$

$$= \det(A) \cdot \det(A) = \det(A)^2$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

Siccome per ipotesi si ha $\det(A) < 0$, risulta

$$\det(A) = -1.$$

Ne segue che

$$\det(A + I_n) = \det(A + A \cdot A^T) = \det[A(I_n + A^T)] =$$

$$= \det(A) \cdot \det(I_n + A^T) = -1 \cdot \det[(I_n + A)^T] =$$

$$= -1 \cdot \det(I_n + A)$$

$$\Rightarrow 2 \det(A + I_n) = 0 \Rightarrow \det(A + I_n) = 0,$$

ossia la tesi.

2° metodo

Consideriamo la funzione

$$P_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \longmapsto P_A(\lambda)$$

e osserviamo che essa è continua, in quanto funzione polinomiale. Inoltre se $\lambda \longrightarrow -\infty$ si ha

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \sim (-1)^n \cdot \lambda^n.$$

asintoticamente equivalente

Poiché $\det(A) < 0$, si ha $P_A(0) < 0$. Inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\lim_{\lambda \to -\infty} P_A(\lambda) = +\infty.$$

In particolare, esiste $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ tale che $P_A(a) > 0$. Dal teorema di esistenza degli zeri segue l'esistenza di $b \in (a, 0)$ tale che $P_A(b) = 0$. Siccome A è una matrice ortogonale, per l'esercizio 5 si ha $b = -1$. Dunque

$$P_A(-1) = \det(A + I_n) = 0.$$

∎

Es 7

Sia

$$V := \{P(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 5} : P(1) = P(-1) = 0\}.$$

(a) Determinare una base di V su $\mathbb{R}$,

(b) dire quando esiste un'applicazione lineare iniettiva o suriettiva da V in $\mathrm{Sym}(2, 2, \mathbb{R})$.

SOL

(a) Consideriamo

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 5}.$$

Si ha $P(x) \in V$ se e solo se

$$\begin{cases} P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 = 0 \\ a_0 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -a_3 - a_5 \\ a_0 = -a_2 - a_4 \end{cases}$$

Pertanto gli elementi di V hanno la forma seguente:

$$P(x) = -a_2 - a_4 + (-a_3 - a_5)x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 =$$

$$= a_2(x^2 - 1) + a_3(x^3 - x) + a_4(x^4 - 1) + a_5(x^5 - x).$$

Ne segue che $V = \mathrm{Span}(x^2-1, x^3-x, x^4-1, x^5-x)$. Poiché tali polinomi sono linearmente indipendenti, l'insieme

$$\mathcal{B} = \{x^2-1, x^3-x, x^4-1, x^5-x\}$$

è una base di V. In particolare si ha $\dim V = 4$.

(b) Ricordiamo che esiste un'applicazione lineare iniettiva

$$\alpha : V \longrightarrow \mathrm{Sym}(2,2,\mathbb{R})$$

se e solo se $\dim V \leq \dim \mathrm{Sym}(2,2,\mathbb{R})$. Analogamente, esiste un'applicazione lineare suriettiva da V in $\mathrm{Sym}(2,2,\mathbb{R})$ se e solo se $\dim V \geq \dim \mathrm{Sym}(2,2,\mathbb{R})$. Osserviamo che

$$\dim V = 4 > 3 = \dim \mathrm{Sym}(2,2,\mathbb{R}).$$

Pertanto, <u>non</u> esiste alcuna applicazione lineare iniettiva da V in $\mathrm{Sym}(2,2,\mathbb{R})$, ma ne esiste almeno una suriettiva.

▨

07/12/20

Esercitazione 18

Teorema spettrale (caso complesso)

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Ricordiamo che un prodotto hermitiano (definito positivo) su V è una mappa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

che verifica le seguenti proprietà:

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in V,$

(b) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V,$

(c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ x, y \in V$

(d) $\langle x, x \rangle > 0 \quad$ se $x \neq 0.$

DEF

Sia V uno spazio euclideo complesso (cioè uno spazio vettoriale dotato di un prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Un'applicazione lineare $f : V \to V$ è detta hermitiana se

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

DEF

Sia $A \in M(n, n, \mathbb{C})$ una matrice. La sua aggiunta è data da

$$A^* = \overline{A}^T.$$

In altre parole, A^* si ottiene coniugando tutte le entrate di A e trasponendo la matrice così ottenuta. Diremo che A è hermitiana se $A = A^*$.

Ricordiamo i seguenti risultati:

TEO

Se $f: V \to V$ è un'applicazione lineare hermitiana, allora ogni autovalore λ di f è reale.

DIM

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di f e sia $v \in V$ un autovettore con autovalore λ. Si ha

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle \overset{f \text{ hermitiana}}{=} \langle v, f(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle =$$

$$= \overline{\langle \lambda v, v \rangle} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle v, v \rangle} = \overline{\lambda} \cdot \langle v, v \rangle.$$

Ne segue che

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \langle v, v \rangle = 0.$$

Poiché $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, risulta

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

Ciò significa che λ è un numero reale.

TEO

Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare hermitiana. Consideriamo due autovalori distinti λ, μ con autovettori corrispondenti x, y rispettivamente. Risulta $\langle x, y \rangle = 0$.

DIM

Risulta

$$\lambda \cdot \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle \overset{f \text{ hermitiana}}{=} \langle x, f(y) \rangle =$$

$$= \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

$\mu \in \mathbb{R}$

Ne segue che

$$(\lambda - \mu) \cdot \langle x, y \rangle = 0.$$

Poiché $\lambda \neq \mu$, si ottiene

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

DEF

Consideriamo una matrice $U \in M(n, n, \mathbb{C})$. Diremo che U è <u>unitaria</u> se $U^* \cdot U = I_n$.

PROP

Sia V uno spazio euclideo complesso. Una matrice $U \in M(n, n, \mathbb{C})$ è unitaria se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di V.

DIM

Indichiamo con α_i la i-esima colonna di U. Osserviamo che

$$(U^* \cdot U)_{i,j} = \alpha_i^* \cdot \alpha_j = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Di conseguenza, $U^* \cdot U = I_n$ se e solo se

$$(U^* \cdot U)_{i,j} = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

ossia se e solo se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ è una base ortonormale di V.

Es 1 (Teorema spettrale nel caso complesso)

Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo complesso e consideriamo un'applicazione lineare hermitiana $f: V \longrightarrow V$. Lo spazio V ammette una base ortonormale formata da autovettori di f.

SOL

Procediamo per induzione su $n := \dim_{\mathbb{C}} V$. Se $n = 1$, consideriamo un autovalore λ di f (esso esiste sempre per il teorema fondamentale dell'algebra). Indichiamo con V_λ l'autospazio relativo a λ. Siccome $n = 1$, si ha $V_\lambda = V$. Pertanto f è della forma

$$f: V \longrightarrow V$$
$$z \longmapsto \lambda \cdot z.$$

Ciò significa che ogni vettore $z \in V \setminus \{0\}$ è un autovettore di f. Quindi se $z \in V \setminus \{0\}$, una base ortonormale di V formata da autovettori di f è data da $\left\{\frac{z}{\|z\|}\right\}$.

Supponiamo ora che la tesi sia vera se $\dim V = n - 1$ e dimostriamo che deve valere anche per $\dim V = n$. Consideriamo un autovalore λ di f e sia $v \in V \setminus \{0\}$ tale che

$$f(v) = \lambda \cdot v, \qquad \|v\| = 1.$$

Poniamo $W := \mathrm{Span}(v)$ e ricordiamo che

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Siccome $\dim W = 1$, si ha

$$\dim W^{\perp} = n-1 < n.$$

Se $w \in W^{\perp}$, si ottiene

$$\langle f(w), v\rangle \overset{f \text{ è hermitiana}}{=} \langle w, f(v)\rangle = \langle w, \lambda \cdot v\rangle \overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda \cdot \langle w, v\rangle = 0.$$

Ciò significa che $f(w) \in W^{\perp}$ per ogni $w \in W^{\perp}$. Pertanto, f si restringe ad un'applicazione lineare hermitiana

$$f_{|W^{\perp}} : W^{\perp} \longrightarrow W^{\perp}.$$

Poiché $\dim W^{\perp} = n-1$, per ipotesi induttiva esiste una base ortonormale $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ di $W^{\perp}$ formata da autovettori di $f_{|W^{\perp}}$ (e quindi anche di f). Dunque

$$\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_{n-1}, v\}$$

è una base ortonormale di V formata da autovettori di f.

Es 2

Sia $A \in M(n,n,\mathbb{C})$ una matrice hermitiana. Allora A è diagonalizzabile. Più precisamente, esiste una matrice unitaria U tale che

$$D := U^* A U$$

sia una matrice diagonale reale.

Sol

Per il teorema spettrale nel caso complesso, esiste una base ortonormale di $V = \mathbb{C}^n$ formata da autovettori di A. Indichiamo con $\mathcal{B}$ tale base e con U la matrice di cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{C}^n$ a $\mathcal{B}$. Allora la matrice

$$D := U^{-1} A U$$

è una matrice diagonale. Osserviamo che gli elementi che stanno sulla diagonale di D sono

gli autovalori di A. Siccome A è hermitiana, come visto sopra, tutti i suoi autovalori sono reali. Dunque la matrice D è reale. Ricordiamo che le colonne della matrice U sono esattamente i vettori della base B. Pertanto esse sono vettori ortonormali tra loro. Ciò significa che U è una matrice unitaria. Dunque si ha $U^{-1} = U^*$, da cui segue

$$D = U^* A U.$$

∎

09/12/20

Esercitazione 19

Teorema spettrale. Prodotti scalari e teorema di rappresentazione di Riesz.

Es 1

Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol

Osserviamo che la matrice A è simmetrica. Allora, per il teorema spettrale, essa è diagonalizzabile. Per diagonalizzarla, troviamo una base ortonormale V di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Il polinomio caratteristico è dato da

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$- 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] - (1-\lambda-1) + (1-1+\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-1) + \lambda + \lambda =$$

$$= -2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3).$$

Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica $m_a(\lambda_1) = 2$, $m_a(\lambda_2) = 1$. Calcoliamo l'autospazio V_0:

$$V_0 = \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = -x - y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Dunque $B_0 = \{v_1, v_2\}$, dove

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

è una base non ortogonale di V_0. Per l'algoritmo di Gram-Schmidt si ha:

$$w_1 := v_1,$$

$$w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, risulta

$$\|w_1\| = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Pertanto, posto

$$e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

una base ortonormale di V_0 è data da $\{e_1, e_2\}$.

Calcoliamo adesso l'autospazio V_3:

$$A - 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2x-y \\ x-2y+2x-y=0 \\ x+y-4x+2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=2x-y \\ 3x-3y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=2x-x=x \\ x=y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Posto $V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha

$$\|V_3\| = \sqrt{3}.$$

Dunque una base ortonormale di V_3 è data da

$$e_3 = \frac{V_3}{\|V_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Siccome A è simmetrica si ha $V_0 \perp V_3$, ossia gli autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro. In particolare, ciò significa che $e_3 \perp e_1$ e $e_3 \perp e_2$. Da quanto finora detto e dal fatto che $\mathbb{R}^3 = V_0 \oplus V_3$ segue che $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Consideriamo allora la matrice di cambiamento di base

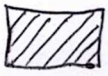
$$N := \left(e_1 \middle| e_2 \middle| e_3 \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Siccome essa è ortogonale, si ha

$$N^{-1} = N^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, risulta

$$N^T \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$



Es 2

Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol

Osserviamo che

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Ciò significa che A è hermitiana. Per il teorema spettrale nel caso complesso, A è diagonalizzabile. Vogliamo trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ formata da autovettori di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) + 2i^2 =$$

$$= 6 - 5\lambda + \lambda^2 + 2\cdot(-1) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 =$$

$$= (\lambda - 1)\cdot(\lambda - 4).$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Gli autospazi sono dati da

$$V_1: \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - i\sqrt{2}\, y = 0 \\ i\sqrt{2}\, x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = i\sqrt{2}\, y \\ 2i^2 y + 2y = -2y + 2y = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{2}\, y \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_4: \begin{pmatrix} -2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x - i\sqrt{2}\, y = 0 \\ i\sqrt{2}\, x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 2x = 0 \quad \checkmark \\ y = i\sqrt{2}\, x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ i\sqrt{2}\, x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow V_4 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix} \right).$$

Poniamo

$$V_1 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Siccome A è hermitiana si ha $V_1 \perp V_4$. In particolare, risulta $V_1 \perp V_2$. Osserviamo che

$$\|V_1\| = \sqrt{\langle V_1, V_1 \rangle} = \sqrt{i\sqrt{2} \cdot (-i\sqrt{2}) + 1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3},$$

$$\|V_2\| = \sqrt{\langle V_2, V_2 \rangle} = \sqrt{1 + i\sqrt{2} \cdot (-i\sqrt{2})} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

Quindi, una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ formata da autovettori di A è data da

$$e_1 := \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora la matrice di cambiamento di base

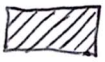
$$U := (e_1 \mid e_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 1 \\ 1 & i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Siccome essa è unitaria, risulta

$$U^{-1} = U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ottiene

$$U^* \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$



Es 3

Su $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ consideriamo il prodotto scalare

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx.$$

Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ di V per ottenere una sua base ortonormale.

SOL

Bisogna considerare

$$P_1(x) := 1,$$

$$P_2(x) := x - \frac{\langle x, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} \cdot P_1,$$

$$P_3(x) := x^2 - \frac{\langle x^2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} \cdot P_1 - \frac{\langle x^2, P_2 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} \cdot P_2.$$

Calcoliamo tutti i prodotti scalari che entrano in gioco:

$$\langle x, P_1 \rangle = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\langle P_1, P_1 \rangle = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1,$$

$$\langle x^2, P_1 \rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Da questi primi calcoli segue che

$$P_2(x) = x - \frac{1}{2}\cdot 1 = x - \frac{1}{2}.$$

Dunque

$$\langle x^2, P_2 \rangle = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12},$$

$$\langle P_2, P_2 \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ne segue che

$$P_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1/12}{1/12}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Infine si ha

$$\langle P_3, P_3\rangle = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 + x^2 + \frac{1}{36} - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{36}x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}.$$

Dai calcoli fatti si deduce che $\|P_1\| = 1$, $\|P_2\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$, $\|P_3\| = \sqrt{\frac{1}{180}}$.
Pertanto la base ortonormale ottenuta è data da

$$e_1 := 1, \quad e_2 := \frac{P_2}{\|P_2\|} = \sqrt{12}\,x - \frac{\sqrt{12}}{2},$$

$$e_3 := \frac{P_3}{\|P_3\|} = \sqrt{180}\,x^2 - \sqrt{180}\,x + \frac{\sqrt{180}}{6}.$$

Es 4

Trovare un polinomio $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 P(x) \cdot q(x)\, dx$$

per ogni $P \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

SOL

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definito nell'esercizio precedente. Consideriamo il funzionale

$$\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto P\left(\frac{1}{2}\right).$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un polinomio $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che

$$\varphi(P) = \langle P, q \rangle \qquad \forall P \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2};$$

in altre parole esiste $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 P(x) \cdot q(x)\, dx.$$

Per trovarlo esplicitamente poniamo $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e imponiamo

$$\varphi(1) = \langle 1, q \rangle,$$

$$\varphi(x) = \langle x, q \rangle,$$

$$\varphi(x^2) = \langle x^2, q \rangle,$$

dove $\{1, x, x^2\}$ è scelta come base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Risulta

$$1 = \varphi(1) = \langle 1, q \rangle = \int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\, dx =$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3},$$

$$\frac{1}{2} = \varphi(x) = \langle x, q \rangle = \int_0^1 (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3)\, dx =$$

$$= \left[a_0 \frac{x^2}{2} + a_1 \frac{x^3}{3} + a_2 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4},$$

$$\frac{1}{4} = \varphi(x^2) = \langle x^2, q \rangle = \int_0^1 (a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4)\, dx =$$

$$= \left[a_0 \frac{x^3}{3} + a_1 \frac{x^4}{4} + a_2 \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{5}.$$

Dunque si ha

$$\begin{cases} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 1 \\ \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{5} = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 1 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3} \\ \frac{a_1}{12} + \frac{a_2}{12} = 0 \\ \frac{a_1}{12} + \frac{4}{45} a_2 = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 + \frac{a_2}{6} \\ a_1 = -a_2 \\ \frac{a_2}{180} = -\frac{1}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = -\frac{3}{2} \\ a_1 = 15 \\ a_2 = -15 \end{cases}.$$

Pertanto si ha

$$q(x) = -15x^2 + 15x - \frac{3}{2}.$$

14/12/20

Esercitazione 20

Esercizi di riepilogo

Es 1

Dati i vettori

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

consideriamo $\mathcal{U} = \mathrm{Span}(u)$, $V = \mathrm{Span}(V)$.

(a) Determinare una base di $\mathcal{U}^\perp$ e una base di $V^\perp$;

(b) mostrare che $V \subseteq \mathcal{U}^\perp$, $\mathcal{U} \subseteq V^\perp$;

(c) determinare la dimensione e una base degli spazi $\mathcal{U}^\perp \cap V^\perp$ e $\mathcal{U}^\perp + V^\perp$.

SOL

(a) Siccome $\{u\}$ è una base di $\mathcal{U}$, risulta

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{U} \iff \langle x, u \rangle = 0,$$

dove $x \in \mathbb{R}^4$.

Perciò si ha

$$\mathcal{U}^{\perp} = \left\{ X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : \langle X, u \rangle = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 2x_2 + x_3 - 2x_4 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Poiché i tre vettori ottenuti sono linearmente indipendenti, l'insieme

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathcal{U}^{\perp}$.

Analogamente, risulta

$$V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, V \right\rangle = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Di nuovo, i tre vettori ottenuti sono linearmente indipendenti e quindi l'insieme

$$\mathcal{B}_{V^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $V^\perp$.

(b) Basta mostrare che

$$v \in \mathcal{U}^\perp, \quad u \in V^\perp,$$

poiché da ciò segue che

$$V = \mathrm{Span}(v) \subseteq \mathcal{U}^\perp, \quad \mathcal{U} = \mathrm{Span}(u) \subseteq V^\perp.$$

Per dimostrare quanto detto, basta osservare che

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 2 - 1 + 2 = 0.$$

(c) Per determinare $\mathcal{U}^\perp \cap V^\perp$, notiamo che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^\perp \cap V^\perp \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^\perp \text{ e } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V^\perp$$

$$\iff \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, u \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, v \right\rangle = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 - 6x_2 - 4x_3 \\ x_4 = 3x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -4x_2 - 3x_3 \\ x_4 = 3x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Dunque

$$U^\perp \cap V^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -4x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Poiché tali vettori sono linearmente indipendenti, l'insieme

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $U^\perp \cap V^\perp$. Ne segue che $\dim(U^\perp \cap V^\perp) = 2$.
Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim(U^\perp + V^\perp) = \dim(U^\perp) + \dim(V^\perp) - \dim(U^\perp \cap V^\perp) =$$

$$= 3 + 3 - 2 = 4.$$

Ciò significa che $U^\perp + V^\perp = \mathbb{R}^4$, per cui una sua base è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ES 2

Sia A una matrice simile a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A è diagonalizzabile? Qual è il suo polinomio caratteristico?

A^3 è diagonalizzabile? Qual è il suo polinomio caratteristico?

SOL

Ricordiamo che una matrice è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale. Pertanto A è diagonalizzabile per definizione. Sia N la matrice invertibile tale che

$$A = N^{-1} \cdot D \cdot N.$$

Sappiamo che A e D hanno lo stesso polinomio caratteristico, infatti

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det(N^{-1} D N - N^{-1}(\lambda I_3) N) =$$

$$= \det(N^{-1}(D - \lambda I_3) N) = \det(N^{-1}) \cdot \det(D - \lambda I_3) \cdot \det(N) =$$

$$= \frac{1}{\det(N)} \cdot P_D(\lambda) \cdot \det(N) = P_D(\lambda).$$

Pertanto si ha

$$P_A(\lambda) = P_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda).$$

Dimostriamo che A^3 è diagonalizzabile. A tal proposito si ha

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = (N^{-1} D N) \cdot (N^{-1} D N) \cdot (N^{-1} D N) =$$

$$= N^{-1} D (N^{-1} \cdot N) D (N^{-1} \cdot N) D N =$$

$$= N^{-1} D \cdot I_3 \cdot D \cdot I_3 \cdot D N =$$

$$= N^{-1} D \cdot D \cdot D N =$$

$$= N^{-1} D^3 N.$$

Ciò significa che A^3 è simile alla matrice D^3.

Osserviamo che

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

ossia D^3 è una matrice diagonale. Dunque A^3 è diagonalizzabile. Siccome A^3 e D^3 sono simili, esse hanno lo stesso polinomio caratteristico. Pertanto si ha

$$P_{A^3}(\lambda) = P_{D^3}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot (8-\lambda).$$

15/12/20

Esercitazione 21

Esercizi di riepilogo.

Es 1

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sono simili.

SOL

Una condizione necessaria perché le due matrici siano simili è

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda).$$

Osserviamo che

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4),$$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} k-\lambda & 3 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (k-\lambda)(4-\lambda) - 0 =$$

$$= (\lambda - k)(\lambda - 4).$$

Pertanto se A e B sono simili si ha $k = 1$. Per $k = 1$, le due matrici hanno due autovalori di molteplicità algebrica

$$m_a(1) = 1, \quad m_a(4) = 1.$$

Poiché $0 < m_g(1) \leq m_a(1)$ e $0 < m_g(4) \leq m_a(4)$, risulta

$$m_g(1) = m_a(1) = 1,$$

$$m_g(4) = m_a(4) = 1.$$

Pertanto le due matrici sono diagonalizzabili. Ciò significa che A e B (per $k=1$) sono simili alla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Siccome la similitudine di matrici è una relazione di equivalenza, A è simile a B. Abbiamo quindi dimostrato che A e B sono simili se e solo se $k = 1$.

▨

Es 2

Costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ i cui primi due vettori appartengano al piano H definito da

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

SOL

I vettori di H soddisfano la seguente condizione:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2 + x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 + x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque una base di H è data da

$$\mathcal{B}_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vogliamo ora completare $\mathcal{B}_H$ a una base di $\mathbb{R}^4$. Per farlo consideriamo la base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$, ossia

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e costruiamo la matrice $A \in M(4,6,\mathbb{R})$, le cui prime due colonne sono i vettori di $\mathcal{B}_H$ e le rimanenti colonne sono i vettori di $\mathcal{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scala si ottiene

$$A \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 + R_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le colonne della matrice A corrispondenti alle colonne della sua riduzione a scala che contengono i pivots sono linearmente indipendenti. Pertanto

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ i cui primi due vettori appartengono ad H. Per l'algoritmo di Gram-Schmidt si ha:

$$V_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \|V_1\| = \sqrt{3},$$

$$\widetilde{V}_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\2/3\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow V_2 := \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \|V_2\| = \sqrt{15}$$

$$\widetilde{V}_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\2/3\\\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|V_3\| = \sqrt{15},$$

$$\widetilde{V_4} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} +$$

$$- \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{15}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|V_4\| = \sqrt{3}.$$

Perciò, come richiesto, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ i cui primi due vettori stiano in H è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/\sqrt{15} \\ -2/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

OSS

In alternativa, per risolvere l'esercizio precedente si può anche determinare una base ortonormale $\mathcal{B}_H$ di H, una base ortonormale $\mathcal{B}_{H^\perp}$ di $H^\perp$ e considerarne l'unione $\mathcal{B}_H \cup \mathcal{B}_{H^\perp}$. Siccome $\mathbb{R}^4 = H \oplus H^\perp$, l'insieme $\mathcal{B}_H \cup \mathcal{B}_{H^\perp}$ ci dà la base richiesta.

Es 3

Sia $A \in M(n,n,\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Dimostrare che esiste una matrice simmetrica $B \in M(n,n,\mathbb{R})$ tale che

$$A = B^3.$$

SOL

Siccome A è simmetrica, per il teorema spettrale, esiste una matrice ortogonale N tale che

$$A = N^T D N,$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

è una matrice diagonale i cui elementi non nulli sono gli autovalori di A. Definiamo le matrici seguenti:

$$\widetilde{D} := \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad B := N^T \widetilde{D} N.$$

Osserviamo che $\widetilde{D}^3 = D$. Ne segue che

$$B^3 = (N^T \widetilde{D} N) \cdot (N^T \widetilde{D} N) \cdot (N^T \widetilde{D} N) =$$

$$= N^T \widetilde{D} \cdot (N \cdot N^T) \cdot \widetilde{D} \cdot (N \cdot N^T) \cdot \widetilde{D} N =$$

$$= N^T \cdot \widetilde{D}^3 \cdot N = N^T \cdot D \cdot N = A.$$

Osserviamo inoltre che

$$B^T = (N^T \widetilde{S} N)^T = N^T \cdot \widetilde{S}^T \cdot (N^T)^T =$$

$$= N^T \cdot \widetilde{S} \cdot N = B,$$

ossia B è una matrice simmetrica. Dunque si ha la tesi. ▨

Es 4

Trovare un polinomio $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che

$$\int_0^1 p(x) \cos(\pi x)\, dx = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

per ogni $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

SOL

Stiamo considerando il funzionale

$$\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto \int_0^1 p(x) \cos(\pi x)\, dx$$

e il prodotto scalare su $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dato da

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx.$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste un polinomio $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ che soddisfa la condizione richiesta. Sia

$$q(x) := ax^2 + bx + c.$$

Per avere l'uguaglianza $\varphi = \langle \cdot, q \rangle$, basta imporla su una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Scegliamo la base $\{1, x, x^2\}$ e imponiamo

$$\varphi(1) = \langle 1, q \rangle,$$

$$\varphi(x) = \langle x, q \rangle,$$

$$\varphi(x^2) = \langle x^2, q \rangle.$$

Si ha

$$\varphi(1) = \int_0^1 1 \cdot \cos(\pi x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi \cdot \cos(\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\sin(\pi x) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \left(\sin(\pi \cdot 1) - \sin(\pi \cdot 0) \right) = 0,$$

$$\varphi(x) = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x)\, dx = \frac{x \cdot \sin(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi^2}\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) = -\frac{2}{\pi^2},$$

$$\varphi(x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \cos(\pi x)\, dx = \frac{x^2 \sin(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{-x\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\, dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1\right) = -\frac{2}{\pi^2},$$

$$\langle 1, q\rangle = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)\, dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c,$$

$$\langle x, q\rangle = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx)\, dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2},$$

$$\langle x^2, q\rangle = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2)\, dx =$$

$$= \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3}.$$

Da quanto detto si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \varphi(1) = \langle 1, q \rangle \\ \varphi(x) = \langle x, q \rangle \\ \varphi(x^2) = \langle x^2, q \rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = -\frac{2}{\pi^2} \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = -\frac{2}{\pi^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{a}{6} - \frac{b}{4} = -\frac{2}{\pi^2} \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{4} - \frac{a}{9} - \frac{b}{6} = -\frac{2}{\pi^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \\ \frac{a}{12} + \frac{b}{12} = -\frac{2}{\pi^2} \\ \frac{4}{45}a + \frac{b}{12} = -\frac{2}{\pi^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \\ \frac{b}{12} = -\frac{2}{\pi^2} - \frac{a}{12} \\ \frac{4}{45}a - \cancel{\frac{2}{\pi^2}} - \frac{a}{12} = -\cancel{\frac{2}{\pi^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \frac{12}{\pi^2} \\ b = -\frac{24}{\pi^2} \\ a = 0 \end{cases}.$$

Pertanto il polinomio richiesto è dato da

$$q(x) = -\frac{24}{\pi^2}x + \frac{12}{\pi^2}.$$

18/12/20

Esercitazione 22

Forme quadratiche reali

Es 1

Consideriamo la forma quadratica

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_4 - 4x_3x_4,$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$. Calcolare l'indice di positività $i_+(\varphi)$, l'indice di negatività $i_-(\varphi)$ e l'indice di nullità $i_0(\varphi)$. Scrivere la forma canonica metrica e la forma canonica affine di φ. Inoltre, determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che porti φ in forma canonica metrica e una base di $\mathbb{R}^4$ che porti φ in forma canonica affine.

SOL

La matrice che rappresenta la forma φ rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché abbiamo rappresentato q rispetto a una base ortonormale, gli indici $i_+(q), i_-(q), i_0(q)$ sono rispettivamente uguali al numero di autovalori positivi, negativi nulli di A. Risulta

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} +$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \left(-\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) +$$

$$- \left(1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right) +$$

$$- \left(1 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -\lambda\left(-\lambda(\lambda^2-4)+2(+2\lambda)\right) - \left(\lambda^2 - 4 + 2(2)\right) +$$

$$- \left(\lambda^2 - 4 + 2(2)\right) =$$

$$= -\lambda\left(-\lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda\right) - \lambda^2 - \lambda^2 =$$

$$= \lambda^4 - 8\lambda^2 - 2\lambda^2 = \lambda^4 - 10\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - \sqrt{10})(\lambda + \sqrt{10})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{10},\ \lambda_2 = -\sqrt{10},\ \lambda_3 = 0,$$

$$m_a(\lambda_1) = 1,\ m_a(\lambda_2) = 1,\ m_a(\lambda_3) = 2.$$

Pertanto si ha

$$i_+(\varphi) = 1,\ i_-(\varphi) = 1,\ i_0(\varphi) = 2.$$

Dunque la forma canonica metrica di φ è

$$\varphi_m(X') = \sqrt{10}\, X_1'^2 - \sqrt{10}\, X_2'^2,$$

mentre la forma canonica affine è

$$\varphi_a(X'') = X_1''^2 - X_2''^2.$$

Una base che porta φ in forma canonica metrica è data da una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ composta da autovettori di A.

Determiniamo tale base, omettendo i calcoli dettagliati:

$$V_{\sqrt{10}}: \begin{cases} -\sqrt{10}x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - \sqrt{10}x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - \sqrt{10}x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - \sqrt{10}x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{x_4}{2} \\ x_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}x_4 \\ x_3 = -\frac{\sqrt{10}}{4}x_4 \end{cases}$$

$$V_{\sqrt{10}} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{10} \\ -\sqrt{10} \\ 4 \end{pmatrix}\right), \quad \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{10} \\ -\sqrt{10} \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+10+10+16} = 2\sqrt{10},$$

$$V_{-\sqrt{10}}: \begin{cases} \sqrt{10}x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + \sqrt{10}x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + \sqrt{10}x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + \sqrt{10}x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{x_4}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{4}x_4 \\ x_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}x_4 \end{cases}$$

$$V_{-\sqrt{10}} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{10} \\ \sqrt{10} \\ 4 \end{pmatrix}\right), \quad \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{10} \\ \sqrt{10} \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{10},$$

$$V_0: \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = -2x_4 \end{cases}$$

$$V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}, \quad \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}.$$

Per quanto detto, una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A è data da

$$\mathcal{B}_m := \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 2/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 2/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

Se considero la matrice N che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}_m$, il cambio di coordinate $x = Nx'$ trasforma φ in φ_m. Infatti

$$\varphi(Nx') = (Nx')^T A (Nx') = x'^T (N^T A N) x' = \varphi_m(x'),$$

poiché

$$N^T A N = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per trovare una base che porta φ in forma canonica affine basta dividere i vettori di $\mathcal{B}_m$ per la radice del modulo del corrispondente autovalore (con l'esclusione degli autovettori relativi a 0, che rimangono invariati). Pertanto la base cercata è

$$\mathcal{B}_a := \left\{ \begin{pmatrix} 10^{-3/4} \\ 1/(2 \cdot 10^{1/4}) \\ -1/(2 \cdot 10^{1/4}) \\ 2 \cdot 10^{-3/4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10^{-3/4} \\ -1/(2 \cdot 10^{1/4}) \\ 1/(2 \cdot 10^{1/4}) \\ 2 \cdot 10^{-3/4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

▨

Es 2

Consideriamo la conica

$$\mathcal{C}: x^2-4xy+4y^2-x-2y-1=0.$$

Trovare la forma canonica metrica e la forma canonica affine di $\mathcal{C}$. Scrivere inoltre un cambiamento di coordinate che porti la conica in forma affine.

Sol

La parte omogenea di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$ è data da $q(x,y) := x^2-4xy+4y^2$. La matrice associata a q è

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Determiniamo il cambiamento di coordinate che diagonalizza A:

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+\cancel{4}-\cancel{4}=\lambda\cdot(\lambda-5)$$

$$V_0: \begin{cases}x-2y=0\\ -2x+4y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2y\\ 0=0\end{cases}$$

$$V_0=\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right), \quad \left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{5},$$

$$V_5: \begin{cases} -4x-2y=0 \\ -2x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \\ y=-2x \end{cases}$$

$$V_5 = \mathcal{L}an\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right), \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}.$$

Consideriamo la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Siccome è una matrice ortogonale ci dà un cambio di coordinate metrico

e il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ossia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$$

Osserviamo che il cambio di coordinate considerato è quello che porta q in forma canonica metrica q_m. Dunque

forma quadratica

si ha

$$q(x,y) = 5x'^2 + 0 \cdot y'^2 = 5 \cdot x'^2.$$

Perciò risulta

$$\mathcal{C}: \; x^2 - 4xy + 4y^2 - x - 2y - 1 = q(x,y) - x - 2y - 1 = 0$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: \varphi_m(x', y') - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: 5x'^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' - 1 = 0,$$

$$5x'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 1 = 0.$$

Utilizziamo il metodo del completamento del quadrato:

$$5x'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 1 + \frac{9}{100} - \frac{9}{100} = 0,$$

$$\left(5x'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' + \frac{9}{100}\right) - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - \frac{109}{100} = 0,$$

$$5\left(\underbrace{x'}_{=x''} + \frac{3}{10\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\underbrace{y'}_{=y''} - \frac{109}{100} = 0.$$

Con il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{3}{10\sqrt{5}} \\ y' = y'' \end{cases}$$

si ottiene

$$\mathcal{C}: 5x''^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y'' - \frac{109}{100} = 0.$$

Inoltre, risulta

$$\mathcal{C}: 5x''^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\left(y'' + \frac{109}{100}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0.$$

$x'' \parallel X$, $y'' \parallel Y$

Pertanto, con il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x'' = X \\ y'' = Y - \frac{109\sqrt{5}}{400}, \end{cases}$$

si ottiene

$$\mathcal{C}: 5X^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}Y = 0.$$

Osserviamo che finora abbiamo usato solo cambi metrici di coordinate, per cui la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ è

$$\mathcal{C}: 5X^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}Y = 0.$$

Pertanto $\mathcal{C}$ è una parabola.

Se infine consideriamo il cambio affine di coordinate

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}} X' \\ Y = \frac{\sqrt{5}}{4} Y', \end{cases}$$

otteniamo la forma canonica affine di $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}: \; X'^2 - Y' = 0.$$

Il cambio di coordinate effettuato per portare $\mathcal{C}$ in forma affine è

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x'' - \frac{3}{10\sqrt{5}} \right) + \frac{2}{\sqrt{5}} y'' = \frac{1}{\sqrt{5}} x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'' - \frac{3}{50} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' = -\frac{2}{\sqrt{5}} \left(x'' - \frac{3}{10\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} y'' = -\frac{2}{\sqrt{5}} x'' + \frac{1}{\sqrt{5}} y'' + \frac{3}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} X + \frac{2}{\sqrt{5}} \left(Y - \frac{109\sqrt{5}}{400} \right) - \frac{3}{50} = \frac{1}{5} X' + \frac{2}{15} \left(\frac{\sqrt{5}}{4} Y' - \frac{109\sqrt{5}}{400} \right) - \frac{3}{50} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}} X + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(Y - \frac{109\sqrt{5}}{400} \right) + \frac{3}{25} = -\frac{2}{5} X' + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{4} Y' - \frac{109\sqrt{5}}{400} \right) + \frac{3}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} X' + \frac{1}{2} Y' - \frac{109}{200} - \frac{3}{50} = \frac{1}{5} X' + \frac{1}{2} Y' - \frac{121}{200} \\ y = -\frac{2}{5} X' + \frac{1}{4} Y' - \frac{109}{400} + \frac{3}{25} = -\frac{2}{5} X' + \frac{1}{4} Y' - \frac{61}{400}. \end{cases}$$

21/12/20

Esercitazione 23

Forme quadratiche reali e coniche

Es 1

Consideriamo la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare

(a) l'espressione della forma quadratica Q associata ad S;

(b) gli autovalori di S;

(c) gli indici di positività, negatività e nullità della forma quadratica Q;

(d) un cambio di variabile $x = Nx'$ che consenta di scrivere Q in forma canonica metrica.

SOL

(a) Sia $x := (x_1, x_2, x_3)^T$. La forma quadratica associata ad S è data da

$$Q(x) = x^T S x = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6 x_1 x_3.$$

(b) Il polinomio caratteristico di S è dato da

$$P_S(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 9] = (-2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-9) =$$

$$= -2 + 4\lambda - 2\lambda^2 + 18 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 9\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda+2)^2 \cdot (\lambda-4).$$

Pertanto gli autovalori di S sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ con molteplicità algebriche

$$m_a(\lambda_1) = 2, \qquad m_a(\lambda_2) = 1.$$

(c) Per determinare gli indici richiesti basta contare rispettivamente gli autovalori positivi, negativi e nulli di S (tenendo conto delle loro molteplicità algebriche). Allora dal punto (b) segue che

$$i_+(Q) = 1, \quad i_-(Q) = 2, \quad i_0(Q) = 0.$$

Siccome S ha sia autovalori positivi che negativi, la forma quadratica Q è indefinita. Inoltre essa è <u>non</u> degenere poiché o <u>non</u> è autovalore di S. Dai calcoli fatti si deduce che la forma canonica metrica di Q è data da

$$Q_m(x') = 4x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2,$$

mentre la forma canonica affine di Q è data da

$$Q_a(x'') = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2,$$

dove abbiamo usato la seguente notazione:

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \qquad x'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

(d) Per trovare un tale cambio di coordinate, bisogna trovare una matrice ortogonale N che diagonalizzi S:

$$V_4: \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_3 \\ -6x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Rightarrow V_4 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2};$$

$$V_{-2}: \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{-2} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1, \quad \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

Poniamo

$$N := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che la matrice N che abbiamo costruito soddisfa la seguente relazione

$$N^T S N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =: D.$$

Dunque, considerando il cambio di coordinate $x = Nx'$, otteniamo la forma canonica metrica di Q:

$$Q(x) \overset{x=Nx'}{=} Q(Nx') = (Nx')^T \cdot S \cdot (Nx') =$$

$$= x'^T (N^T S N) x' = x'^T D x' =$$

$$= 4x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2 = Q_m(x').$$

Es 2

Consideriamo la conica

$$\mathcal{C}: \quad 8x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0.$$

Trovare le forme canoniche metrica e affine di $\mathcal{C}$. Scrivere il cambio affine di coordinate effettuato.

SOL

La parte quadratica dell'equazione di $\mathcal{C}$ ci dà la seguente forma quadratica:

$$q(x,y) = 8x^2 + 2y^2.$$

Poiché la matrice associata a q è diagonale, tale forma quadratica è già espressa in forma canonica metrica. Per il metodo del completamento del quadrato, risulta:

$$\mathcal{C}: \quad 8x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$8x^2 + 2(y^2 + 2y + 1 - 1) + 3 = 0$$

$$8x^2 + 2(y^2 + 2y + 1) - 2 + 3 = 0$$

$$8x^2 + 2(y+1)^2 + 1 = 0$$

$$\begin{matrix} \| & \| \\ x' & y' \end{matrix}$$

Con il cambio di coordinate metrico

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$\mathcal{C}: 8x'^2 + 2y'^2 + 1 = 0.$$

Poiché finora abbiamo utilizzato solo cambi di coordinate metrici, quella ottenuta è la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.

Con l'ulteriore cambio di coordinate affine

$$\begin{cases} x' = \frac{x''}{\sqrt{8}} \\ y' = \frac{y''}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

si ottiene la forma canonica affine di $\mathcal{C}$, ossia

$$\mathcal{C}: x''^2 + y''^2 + 1 = 0.$$

Osserviamo che in $\mathbb{R}^2$ il luogo degli zeri di questa equazione è l'insieme vuoto. Infine, il cambio di coordinate effettuato per portare $\mathcal{C}$ in forma canonica affine è

$$\begin{cases} x = x' = x''/\sqrt{8} \\ y = y' - 1 = y''/\sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Es 3

Consideriamo la conica

$$\mathcal{C}: \; 5x^2+5y^2-6xy+16\sqrt{2}x+38=0.$$

Trovare la forma canonica metrica e la forma canonica affine di $\mathcal{C}$. Scrivere il cambio affine di coordinate effettuato.

SOL

La parte quadratica dell'equazione di $\mathcal{C}$ ci dà la seguente forma quadratica:

$$q(x,y)=5x^2+5y^2-6xy.$$

La matrice simmetrica ad essa associata è

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo q in forma canonica metrica. Si ha

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+25-9=$$

$$=\lambda^2-10\lambda+16=(\lambda-2)(\lambda-8).$$

Inoltre

$$V_2: \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow V_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2},$$

$$V_8: \begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y \Rightarrow V_8 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}.$$

Sia allora

$$N := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ossia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \end{cases}$$

← È un cambio metrico di coordinate perché N è una matrice ortogonale

ci dà

$$\varphi\left(N \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \left(N \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)^T A \left(N \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (x', y') N^T A N \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x', y') \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$= 2x'^2 + 8y'^2.$$

Perciò, con il cambio di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, si ha

$$\mathcal{C}: \; 2x'^2 + 8y'^2 + 16\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' \right) + 38 = 0,$$

$$2x'^2 + 8y'^2 + 16x' - 16y' + 38 = 0.$$

Per il metodo del completamento del quadrato, si ha:

$$\mathcal{C}: \; 2(x'^2 + 8x' + 16 - 16) + 8(y'^2 - 2y' + 1 - 1) + 38 = 0,$$

$$2(x'^2 + 8x' + 16) - 32 + 8(y'^2 - 2y' + 1) - 8 + 38 = 0,$$

$$2(\underbrace{x'}_{x''} + 4)^2 + 8(\underbrace{y'}_{y''} - 1)^2 - 2 = 0.$$

Con il cambio metrico di coordinate

$$\begin{cases} x' = x'' - 4 \\ y' = y'' + 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$\mathcal{C}: \; 2x''^2 + 8y''^2 - 2 = 0,$$

$$x''^2 + 4y''^2 - 1 = 0.$$

Equazione di un'ellisse

Quella ottenuta è la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.

Per ottenere la forma canonica affine di $\mathcal{C}$, basta effettuare l'ulteriore cambio (affine) di coordinate

$$\begin{cases} x'' = X \\ y'' = Y/2 \end{cases}.$$

In questo modo si ottiene

$$\mathcal{C}: X^2 + Y^2 - 1 = 0.$$

Il cambio affine di coordinate effettuato è

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x''-4) - \frac{1}{\sqrt{2}} (y''+1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x''-4) + \frac{1}{\sqrt{2}} (y''+1) \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} (X-4) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Y}{2}+1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} X - \frac{1}{2\sqrt{2}} Y - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} (X-4) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{Y}{2}+1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{2\sqrt{2}} Y - \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

In forma matriciale, tale cambio affine di coordinate può essere scritto come segue:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

non è ortogonale, altrimenti avremmo a che fare con un cambio metrico di coordinate.

▨

22/12/20

Esercitazione 24

Esercizi di riepilogo.

Es 1

Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siano $U = \mathrm{Span}(u)$, $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$.

(a) Verificare che $U \subseteq W$ e completare una base di U a una di W;

(b) determinare una base di $W \cap V$ e una base di $W + V$;

(c) data l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$L(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 \end{pmatrix},$$

dire se $W = \mathrm{Im}\, L$.

SOL

(a) Osserviamo che u soddisfa l'equazione che descrive W:

$$2 \cdot 1 + 0 - 2 = 0.$$

Ciò significa che $u \in W$. Siccome W è uno spazio vettoriale, risulta

$$U = \mathrm{Span}(u) \subseteq W.$$

Vogliamo ora completare una base di U a una base di W. Per farlo consideriamo la base $\{u\}$ di U e determiniamo una base di W. Si ha

$$W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 2x_1 + x_2\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, 2x_1 + x_2)^T : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x_1 \cdot (1,0,0,2)^T + x_2 \cdot (0,1,0,1)^T + x_3 \cdot (0,0,1,0)^T : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Pertanto, una base di W è data da $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} =: \mathcal{B}_V$.

Consideriamo la matrice A che ha come prima colonna il vettore u e come altre colonne i vettori di B_V, ossia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo A a scala si ottiene

$$A \xrightarrow[R_4 - 2R_1]{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente la matrice ha rango tre (ricordiamo che $\operatorname{rank}(A) = \dim(U + W) = \dim W = 3$). Ma ciò che ci interessa principalmente è la posizione dei pivots: poiché i pivots si trovano nelle prime tre colonne, le prime tre colonne di A sono vettori linearmente indipendenti.

Siccome $\dim W = 3$, una base di W contenente u è data da

$$\mathcal{B} = \{u, (1,0,0,2)^T, (0,1,0,1)^T\}.$$

(b) Osserviamo che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W \iff 2x_1 + x_2 - x_4 = 0.$$

Dunque, i vettori di $W \cap V$ sono caratterizzati dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_4 = \lambda_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ \lambda_2 = x_4 \\ x_2 = x_1 - x_4 \\ x_3 = x_1 + 2x_4 \\ x_4 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ \lambda_2 = x_4 \\ x_2 = x_1 - 2x_1 - x_2 \\ x_3 = x_1 + 4x_1 + 2x_2 \\ x_4 = 2x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -8x_2 \\ x_4 = -3x_2 \end{cases}.$$

In altre parole, i vettori di $W \cap V$ sono della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ -8x_2 \\ -3x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$W \cap V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}\right).$$

Una base di $W \cap V$ è $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$. Per la formula di Grassmann si ha

$$\dim(W+V) = \dim W + \dim V - \dim(W \cap V) =$$

$$= 3 + 2 - 1 = 4.$$

Ne segue che $W + V = \mathbb{R}^4$, quindi come base di $W + V$ posso considerare la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(c) Osserviamo che i vettori di $\mathrm{Im}\, L$ sono del tipo

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\mathrm{Im}\,L = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right).$$

Notiamo che

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} \in W,$$

dunque $\mathrm{Im}\,L \subseteq W$. Inoltre i vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti. Ciò significa che

$$\dim \mathrm{Im}\,L = 3 = \dim W.$$

Siccome $\mathrm{Im}\,L \subseteq W$ e $\dim \mathrm{Im}\,L = \dim W$, si ha $\mathrm{Im}\,L = W$.

Es 2

Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, dove A è la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare $\dim \mathrm{Im}(f^2)$ e $\ker(f^2)$;

(b) trovare $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$;

(c) trovare $f^{-1}(V)$, dove $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

SOL

(a) Osserviamo che $\dim \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{rank}(A^2)$. Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Siccome le colonne di A^2 sono a due a due linearmente dipendenti, si ha $\mathrm{rank}(A^2) = 1$. Inoltre si ha

$$\ker(A^2): \quad \begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y + z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A^2) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

(b) Si ha

$$\text{Ker}(f): \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=z \\ x=z \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Inoltre si ha

$$\text{Im } f = \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} =$$

$$= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Osserviamo che

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Im}(f).$$

Siccome $\operatorname{Im} f$ è uno spazio vettoriale, si ha

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \subseteq \operatorname{Im} f.$$

Ne segue che

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

(e) Si ha

$$f^{-1}(V) := \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V\right\}.$$

Dunque i vettori $(x,y,z)^T$ di $f^{-1}(V)$ sono caratterizzati dalla seguente relazione:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x+y-z\\x-y-z\\2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\0\\\lambda_2\end{pmatrix}, \quad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che

$$\begin{cases} x+y-z = \lambda_1+\lambda_2 \\ x-y-z = 0 \\ 2y = \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 2y \\ \lambda_1 = x+y-z-2y = x-y-z \\ x = y+z \end{cases}.$$

Le prime due equazioni del sistema finale non impongono condizioni su $(x,y,z)^T$, ma determinano i valori dei coefficienti λ_1, λ_2 della combinazione lineare. Pertanto si ha

$$f^{-1}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y+z \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$